

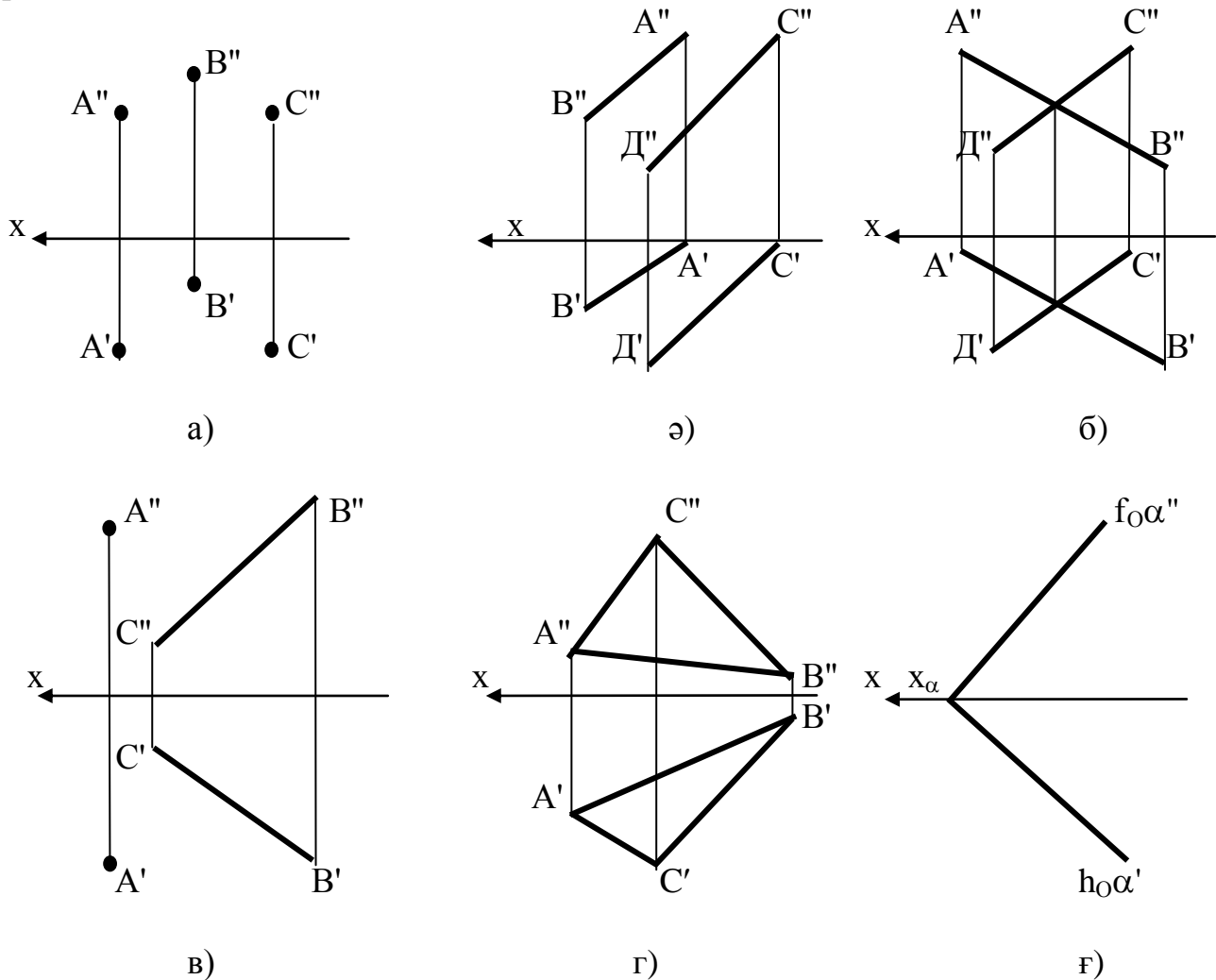
4 ЖАЗЫҚТЫҚТАРДЫ ПРОЕКЦИЯЛАУ

Жазықтыққа көптеген позициялық және метрлік есептердің берілуі кіреді. Қарапайым геометрияда жазықтықтардың кеңістіктегі топтарын анықтайтын аксиома топтары қарастырылады. Оларды жазықтықтарға тиісті болатын нүктелер мен жазықтыққа тиісті түзулерді, екі жазықтықтың қиылысу сызығын анықтағанда, екі түзу арқылы ортақ нүктесі бар жазықтықтар жүргізетін есептерді шығарғанда естен шығармау керек.

4.1 Жазықтықтардың сызбада берілу тәсілдері

Біз жазықтықты: үшбұрыш, дөңгелек, төртбұрыш т.с.с. фигуралар ретінде қабылдап үйреніп кеттік.

Жазықтықтар 37-ші суретте көрсетілгендей а)бір түзде жатпайтын үш нүктемен, ә)екі параллель түзумен, б)екі қиылысатын түзумен, в)түзу және онда жатпайтын нүктемен, г)пішіндермен, ғ)жазықтық ізімен т.б. тәсілдермен сызбада беріледі.



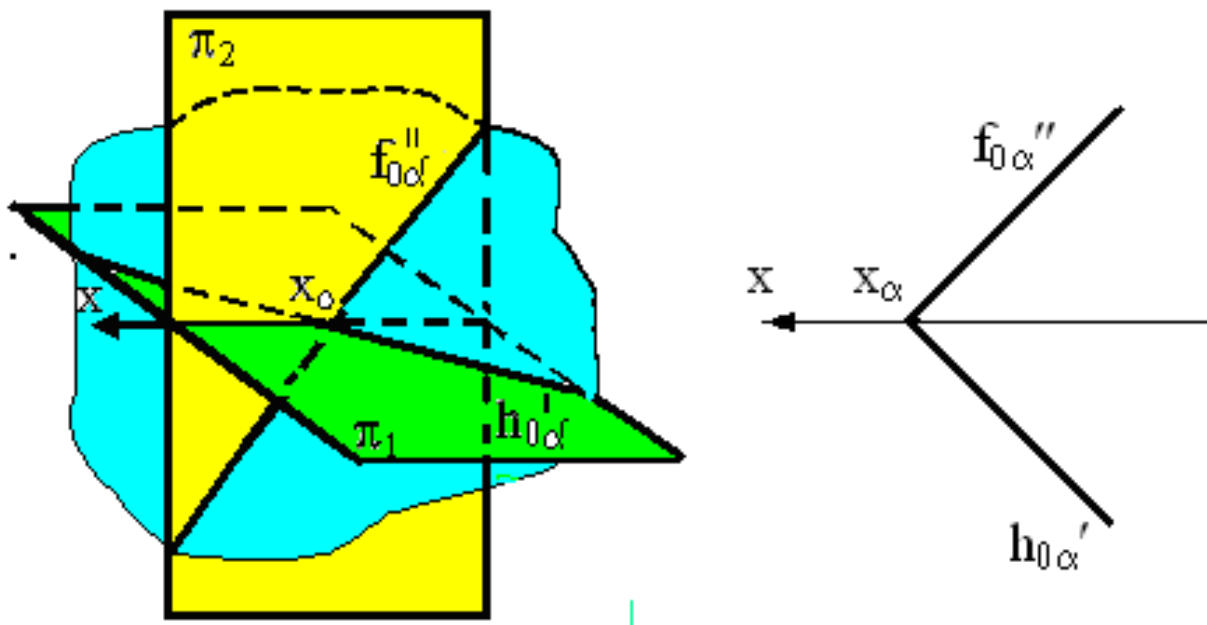
Сурет 37

4.2 Жазықтықтың іздері

Жазықтықты шексіз деп қарастырып, оны проекция жазықтығымен қиылысқан сызығы арқылы бейнелесек көрнекті болады.

Жазықтықтың ізі - деп жазықтықтың проекция жазықтығымен қиылысқан сызығын айтады.

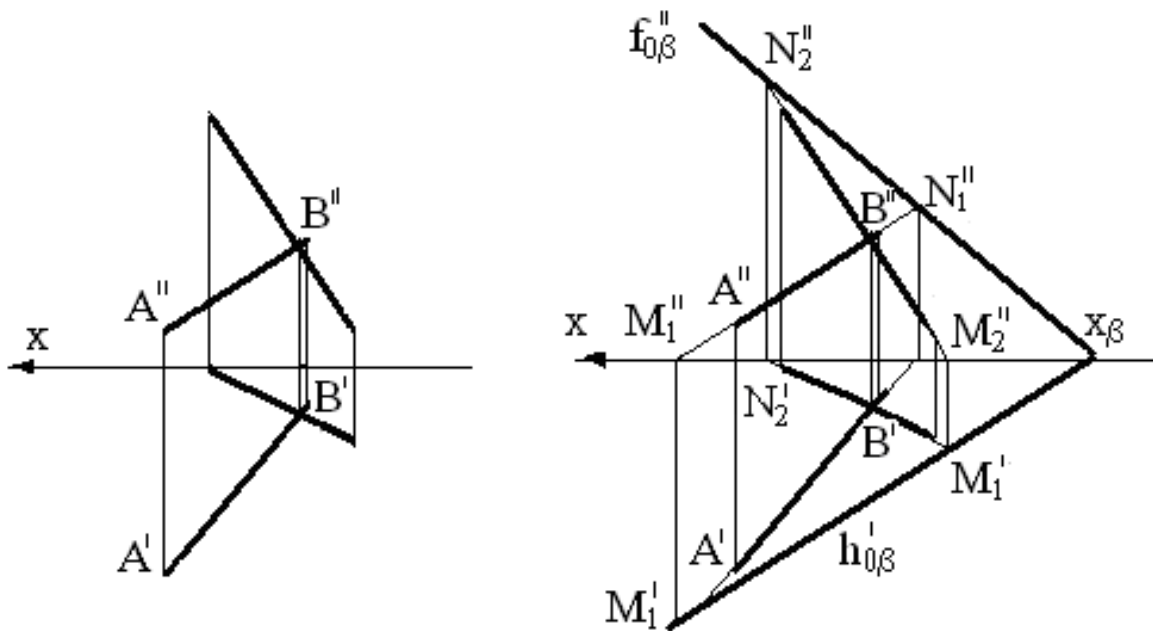
38-шы суретте α жазықтығы горизонталь проекция жазықтығымен қиылысқан түзуі $h_{0\alpha}'$ - деп белгіленген, ал фронталь проекция жазықтығымен қиылысқан сызығы $f_{0\alpha}''$ - деп белгіленеді. $h_{0\alpha}'$ - түзуі, жазықтықтың горизонталь ізі деп аталады. $f_{0\alpha}''$ - түзуі, жазықтықтың фронталь ізі деп аталады. Жазықтықтың проекция жазықтығымен қиылысқан нүктесі x_α - деп белгіленеді. x_α -тоғысу нүктесі деп аталады. Сызуда жазықтық 47-ші суреттегідей оның іздерінің проекцияларымен ғана беріледі.



Сурет 38

39-ші суретте β жазықтығы АВ және ВС қиылысатын түзулермен берілген. β жазықтығы π_1 проекция жазықтығын қиып өтетін сызықты салу үшін, екеуіне де тиісті болатын екі нүктені салсақ жеткілікті.

Бұндай нүктелер болып АВ және ВС түзулерінің π_1 проекция жазықтығымен қиылысқан нүктелерін аламыз. Осы іздердің проекцияларын салып, M_1 мен M_2 нүктелері арқылы түзу жүргізгенде π_1 проекция жазықтығымен және β жазықтықтарының қиылысу сызығының горизонталь ізінің проекциясын аламыз. π_2 проекция жазықтығымен β жазықтықтарының қиылысу сызығы АВ және ВС түзулерінің фронталь іздерін анықтайды.



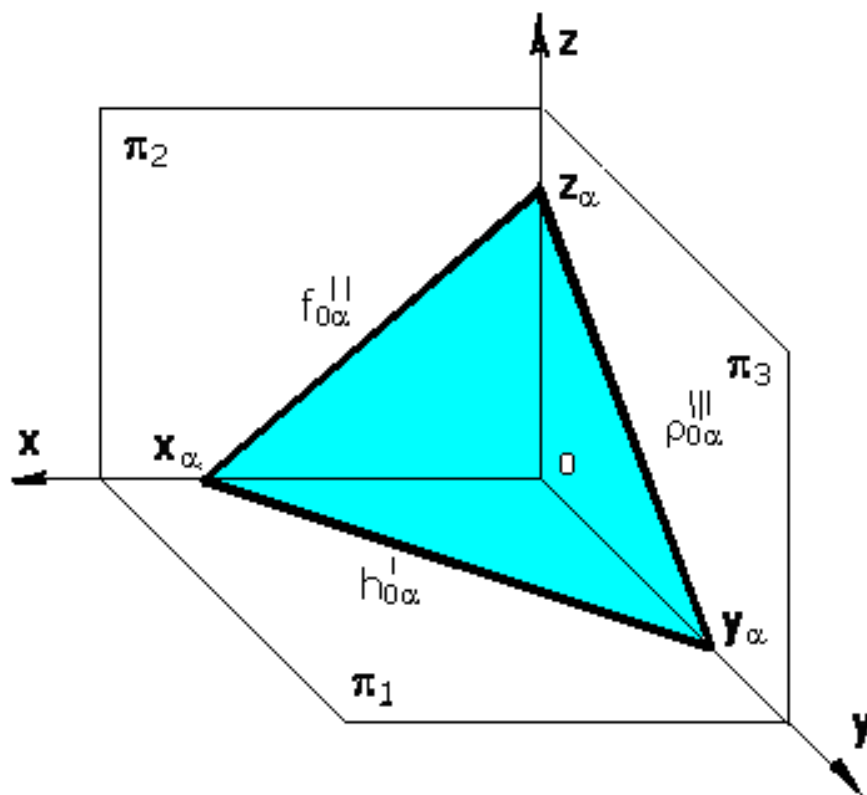
Сурет 39

Егер берілген жазықтықты 40-шы суреттегідей π_1, π_2, π_3 жүйесінде қарастырсақ, проекция осьтерін қиып өтеді, осьпен қиылысқан нүктелері $x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha$ арқылы белгіленеді.

$h_{0\alpha}'$ - жазықтықтың горизонталь ізі,

$f_{0\alpha}''$ - жазықтықтың фронталь ізі,

$\rho_{0\alpha}'''$ - жазықтықтың профиль ізі.



Сурет 40

4.3 Жазықтықтардың проекция жазықтықтарына байланысты орналасуы

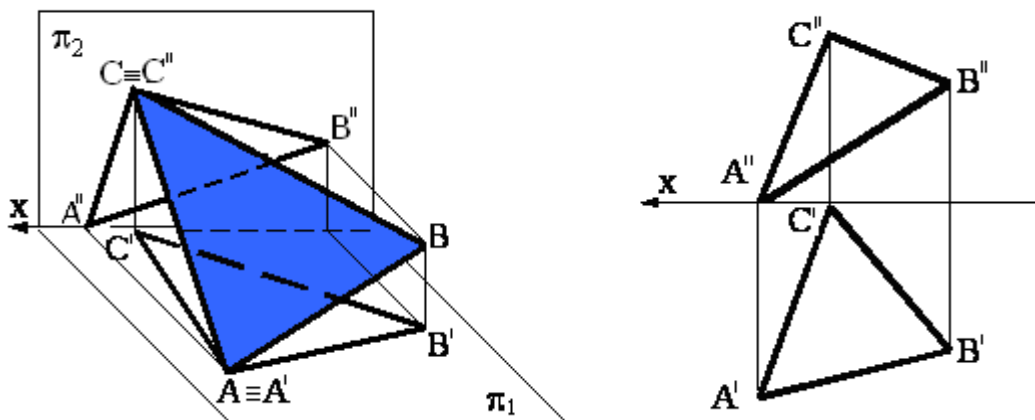
Жазықтықтардың π_1, π_2, π_3 проекция жазықтықтарына байланысты орналасуы:

1. Жазықтық еш қандай проекция жазықтығына перпендикуляр емес.
2. Жазықтық бір ғана проекция жазықтығына перпендикуляр.
3. Жазықтық екі проекция жазықтығына перпендикуляр.

Екінші үшінші орындағы жазықтықтардың жалпы атауы “проекциялаушы жазықтықтар”.

1. Жазықтықтар ешқандай проекция жазықтығына перпендикуляр емес болса, жазықтық жалпы жағдайда болады.

41-ші суретте келтірілген жазықтық π_1 -ге де, π_2 -ге де, π_3 -ке де перпендикуляр емес. Оның π_1 -ге де, π_2 -ге де перпендикуляр емес екендігін $A'B'C'$ және $A''B''C''$ проекцияларынан көруге болады. Жалпы жағдайда орналасқан жазықтықтар әр бір осьті Ox, Oy, Oz қиып өтеді.

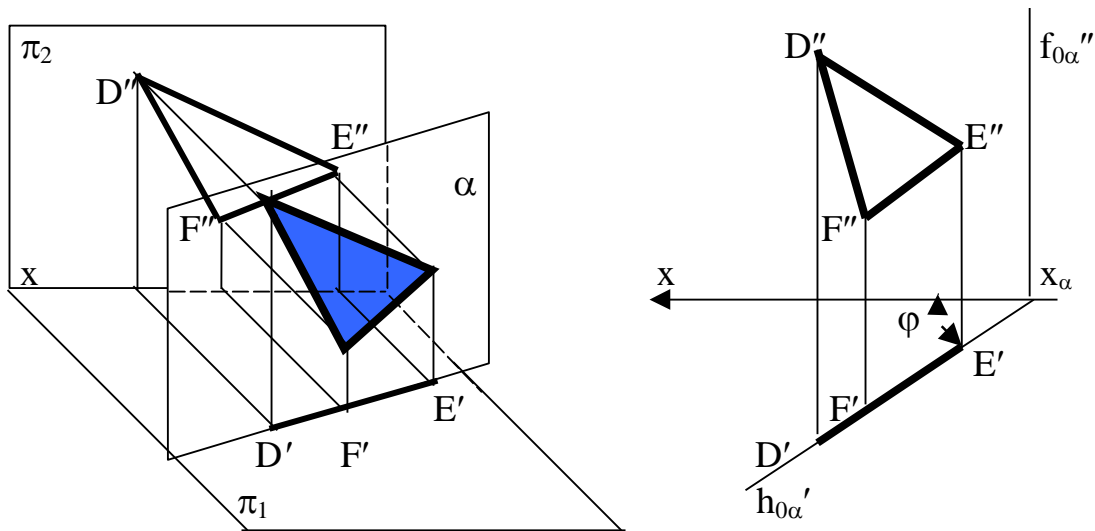


Сурет 41

Жалпы жағдайда орналасқан жазықтықтардың іздері осы проекция остеріне ешқашан перпендикуляр болмайды. Егер жалпы жағдайда орналасқан жазықтықтардың $h_{0\alpha'}$ және $f_{0\alpha''}$ іздері Ox осімен бірдей бұрыш жасаса, онда α жазықтығымен π_1 және π_2 проекция жазықтықтарының арасындағы бұрыш өзара тең болады.

2. Егер жазықтық бір ғана проекция жазықтығына перпендикуляр болса, онда үш түрлі ерекше жағдай да орналасуы мүмкін.

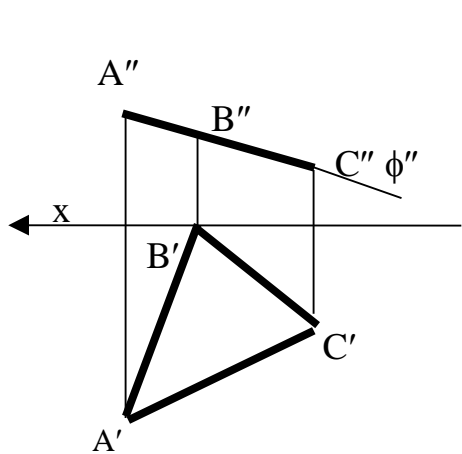
а) Жазықтық горизонталь проекция жазықтығына перпендикуляр орналасса, ондай жазықтық горизонталь проекциялаушы жазықтық деп аталады. 42-ші суретте DEF үш бұрышымен анықталатын жазықтық π_1 - проекция жазықтығына перпендикуляр болса, онда $D'E'F'$ проекциясы түзу болады. ϕ бұрышы берілген жазықтықпен π_2 – проекция жазықтығының арасындағы бұрышқа тең.



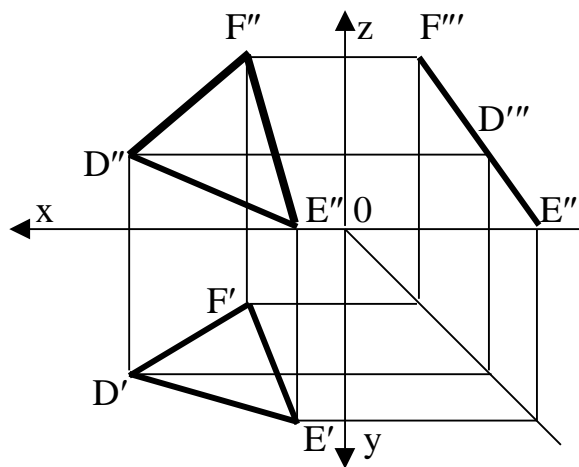
Сурет 42

б) Жазықтық фронталь проекция жазықтығына перпендикуляр орналасса, ондай жазықтық фронталь проекциялаушы жазықтық деп аталады. 43-ші суретте ABC үшбұрышымен анықталатын жазықтық π_2 проекция жазықтығына перпендикуляр болса, онда $A''B''C''$ проекциясы түзу болады. ϕ бұрышы берілген жазықтықпен π_1 проекция жазықтығының арасындағы бұрышқа тең.

в) Жазықтық профиль проекция жазықтығына перпендикуляр орналасса, ондай жазықтық профиль проекциялаушы жазықтық деп аталады. 44-ші суретте ABC үшбұрышымен анықталатын жазықтық π_2 проекция жазықтығына перпендикуляр болса, онда $D''E''F''$ проекциясы түзу болады. Бұндай жазықтықтардың горизонталь және фронталь проекциялары Ox осіне, сондай-ақ бір-біріне параллель болады.



Сурет 43

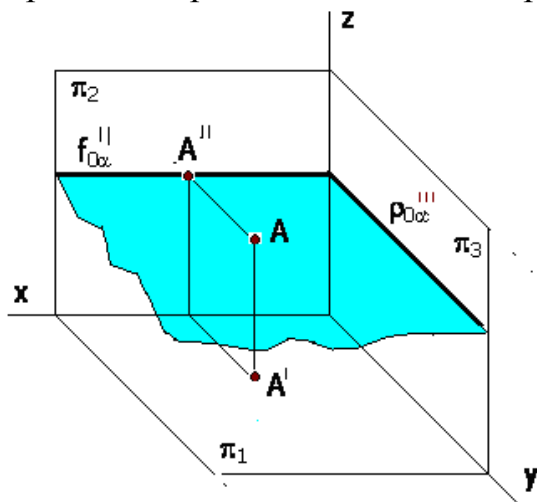


Сурет 44

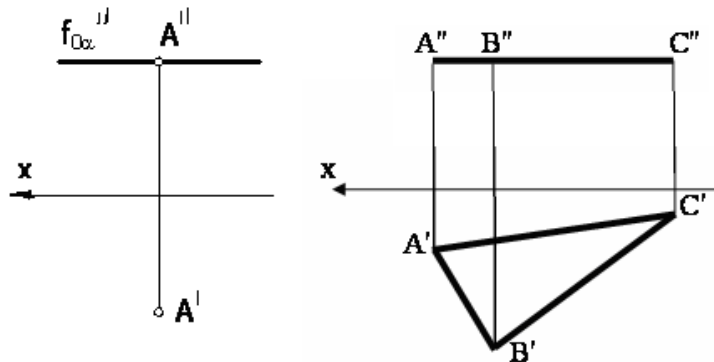
3. Егер жазықтық екі проекция жазықтығына перпендикуляр орналасса, ондай жазықтық деңгейлік жазықтық деп аталады. Олар да үш түрлі ерекше жағдайда орналасуы мүмкін.

а) Жазықтық π_2 және π_3 проекция жазықтықтарына перпендикуляр, яғни π_1 проекция жазықтықтарына параллель орналасса, ондай жазықтық горизонталь жазықтық деп аталады.

45-ші суретте кеңістікте А нүктесі арқылы жүргізілген π_1, π_2 және π_3 жүйесінде жазықтық іздері берілген. эпюрде $f_{0\alpha}$ жазықтықтың фронталь ізі. 46-ші суретте ABC үшбұрышымен анықталатын жазықтық π_2 және π_3 проекция жазықтықтарына перпендикуляр, $A''B''C''$ және $A'''B'''C'''$ проекциялары түзу сызық болады. $A'B'C'$ проекциялары нақты шамамен проекцияланады.



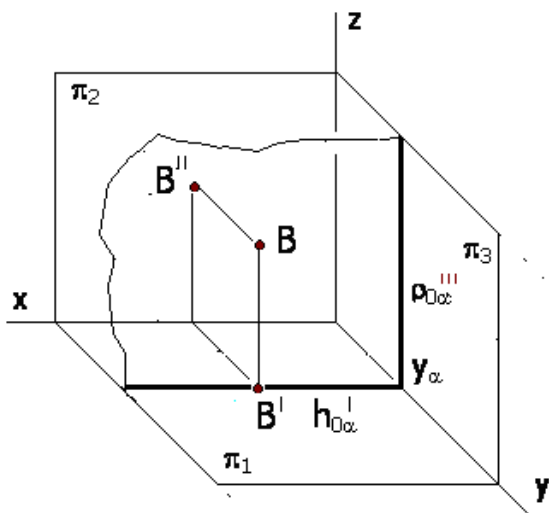
Сурет 45



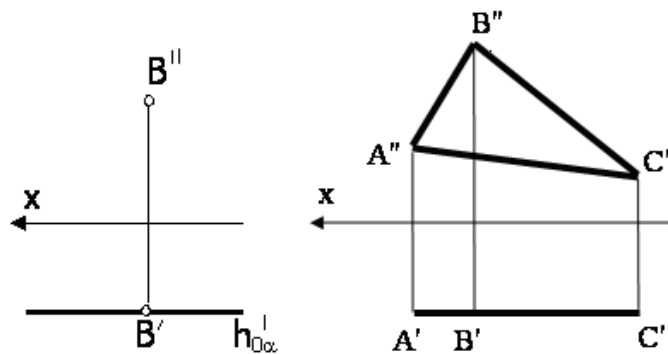
Сурет 46

ә) Жазықтық π_1 және π_3 проекция жазықтықтарына перпендикуляр π_2 жазықтығына параллель орналасса, жазықтық фронталь жазықтық деп аталады.

47-ші суретте π_1, π_2 жүйесінде жазықтық ізімен берілген. $h_{0\alpha}$ жазықтықтың горизонталь ізі. 48-ші суретте ABC үш бұрышымен анықталатын жазықтық π_1 және π_2 проекция жазықтықтарына перпендикуляр, бұнда $A'B'C'$ және $A'''B'''C'''$ проекциялары түзу сызық болады. $A''B''C''$ проекциялары нақты шамамен проекцияланады



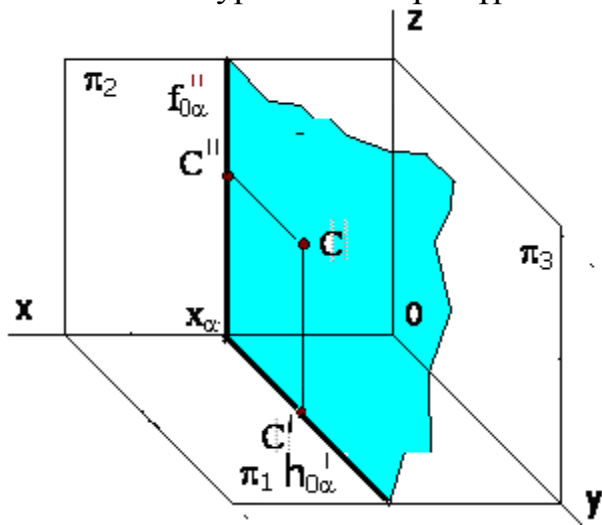
Сурет 47



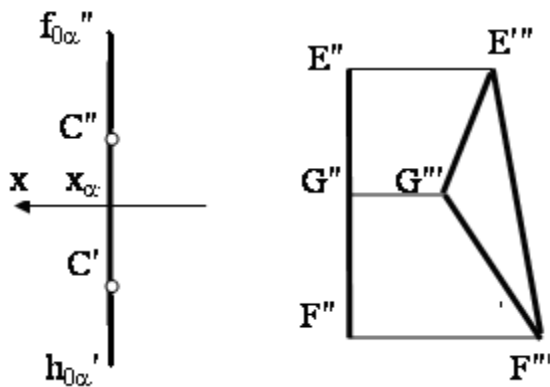
Сурет 48

б) Жазықтық π_1 және π_2 проекция жазықтықтарына перпендикуляр, яғни π_3 жазықтығына параллель орналасса, ондай жазықтық профиль жазықтық деп аталады. 49-ші суреттерінде π_1 , π_2 жүйесінде жазықтық ізімен берілген.

50-ші суретте EFG үшбұрышымен анықталатын профиль жазықтық берілген.



Сурет 49



Сурет 50

4.4 Жазық фигуралардың проекцияларын салу

Жазық фигуралардың (барлық нүктелері бір жазықтықта жататын фигуралар: квадрат, шеңбер, эллипс т.с.с) проекцияларын салу фигура проекцияларының жиегін құрайтын нүктелердің, түзулердің, қисық сызықтардың проекцияларын салуға әкеледі. Үшбұрыштың координаталары белгілі болса, осы нүктелердің проекцияларын салу арқылы фигураның проекциясын табуға болады.

Көпбұрыштардың сызбасын салу.

Жазықтыққа әртүрлі проекцияланатын жазық фигуралардың қалай салынатынын қарастырайық.

1. Егер проекцияланушы фигура жазықтыққа параллель болса, онда ол фигура сол калпында проекцияланады (квадрат-квадратқа, дөңгелек-дөңгелекке т.с.с).
2. Егер проекцияланушы фигура жазықтыққа перпендикуляр болса, онда ол фигура түзу сызық болып проекцияланады.
3. Егер проекцияланушы фигура жазықтыққа қиғаш орналасса, онда ол жазықтыққа бұрмаланып проекцияланады.

Фигураның жазықтыққа перпендикуляр орналасқан жағдайын қарастырайық.

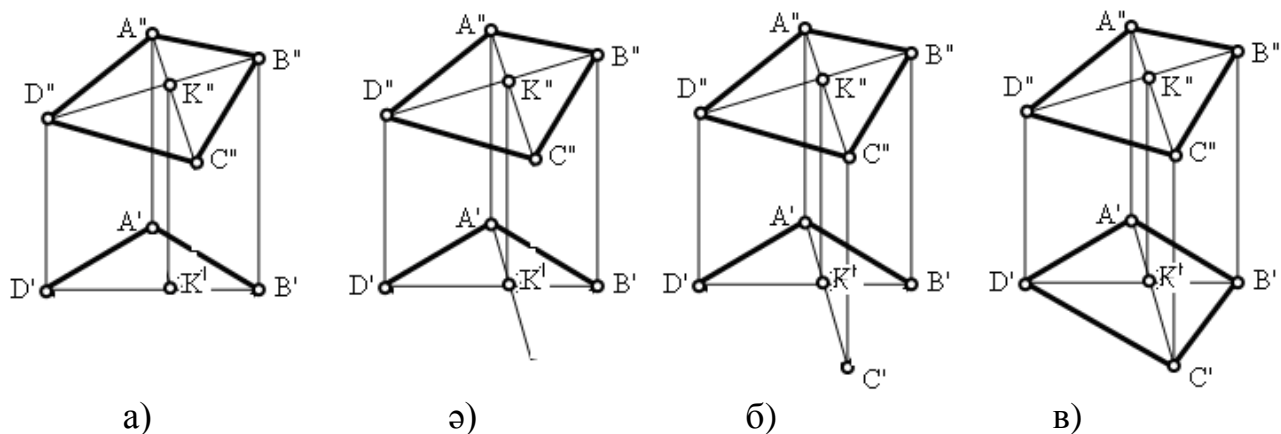
Үшбұрыштың проекциясы үшбұрыш. Үшбұрыштың жазықтықтағы проекциясын салу үшін оның жазықтықтағы үш төбесін табу жеткілікті. Егер есептің шартында үшбұрыш төбелерінің координаталары берілмесе, оның проекцияларын алуға да болады.

Төртбұрыштың проекциясы төртбұрыш. Квадратты, тіктөртбұрышты, ромбты, параллелограмды салғанда, олардың қарама-қарсы қабырғаларының параллельдігі сақталады. Параллель түзулердің проекциясы да параллель.

Сызбада тік төртбұрыштың төрт нүктесі де беріліп, ал проекцияда үш нүктесі ғана тұрса, оны кез-келген жерден салуға болмайды, себебі ол жазықтыққа тиісті емес болуы мүмкін. Оны диагональдарын жүргізу арқылы табамыз.

Көпбұрыштарды сызған кезде, берілген фигураның бір жазықтықтағы барлық нүктелерін табу ережесін қадағалау керек. Мысалы ABCD төртбұрышының фронталь проекциясы берілген және горизонталь проекциясының үш ұшы A', B', C' берілген. D' нүктесін салу үлгісі 60-ші суретте бейнеленген.

51,а) суретте ең бірінші AC және BD диагональдарының $A'C'$ және $B'D'$ фронталь проекциялары мен AC диагоналінің $A'C'$ горизонталі жүргізілген. Кейіннен диагоналінің қилысу нүктесі K проекцияда K' табылған. Сол арқылы 51,ә) суретте D нүктесінің D' проекциясы табылады. 51,б) суретте; Содан $D'A'$ нүктелері мен $D'C'$ нүктелерін қосамыз, сөйтіп ABCD тіктөртбұрыштың проекциясы 51,в) суретте шығады. Сол сияқты басқа да көпбұрышты үшбұрыштар салынады.



Сурет 51

4.5 Жазықтықта ерекше жағдайда орналасатын түзулер

Жазықтықта ерекше жағдайда орналасатын түзулерге горизонтальдар мен фронтальдар және проекция жазықтығына ең үлкен көлбеу бұрыш жасайтын сызықтар жатады. Ең үлкен көлбеу бұрыш жасайтын сызықтарды ең үлкен сырғу сызығы деп атаймыз.

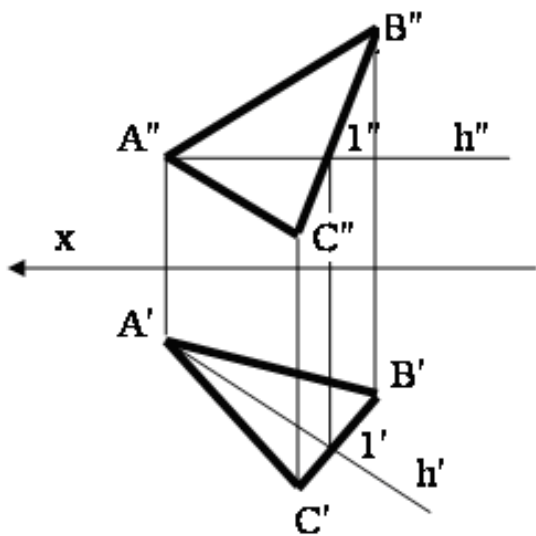
Жазықтықтың горизонтальдары – деп осы жазықтықта жататын және π_1 горизонталь проекция жазықтығына параллель болатын түзулерді айтады. Горизонталь h әріпімен белгіленеді.

52-ші суретте ABC үш бұрышымен берілген жазықтықтың A ұшы арқылы горизонталь жүргізу керек. Жазықтықтың горизонталі деген π_1 горизонталь жазықтығына параллель түзу болғандықтан, осы түзудің h'' фронталь проекциясын $A''1'' \perp A''A'$ жүргізу арқылы аламыз. Осы горизонтальдың h' горизонталь проекциясын салу үшін $1'$ нүктесін саламыз және A' пен $1'$ түзуін жүргіземіз. Салынған Ah түзуі жазықтықтың горизонталь сызығы болып табылады.

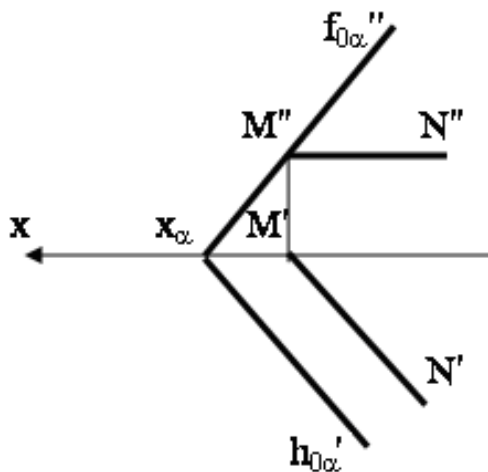
Егер жазықтық ізімен берілсе оның горизонтальдарын салу керек. Жазықтықтың горизонталь ізі оның горизонтальдарының бірі (нөлдік горизонталь)

болады. Сондықтан жазықтықтың горизонтальдарын салу осы түзу сияқты, оның горизонталіне параллель жүргізілген түзу болады.

53-ші суретте горизонтальдың горизонталь проекциясы h' жазықтықтың $h_{0\alpha}'$ горизонталь ізіне параллель, ал фронталь проекциясы h'' OX өсіне параллель болады.



Сурет 52



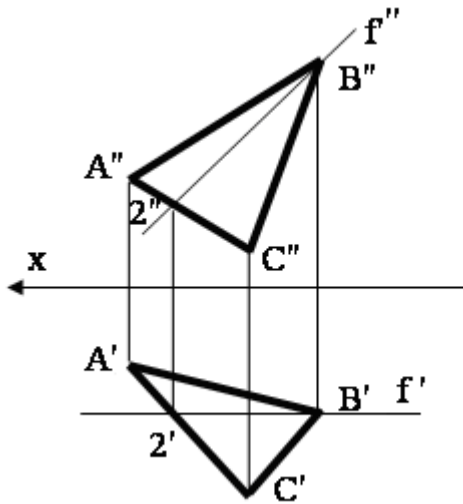
Сурет 53

Жазықтықтың фронтальдары – деп осы жазықтықта жататын және π_2 фронталь проекция жазықтығына параллель болатын түзулерді айтады. Фронталь f әріпімен белгіленеді.

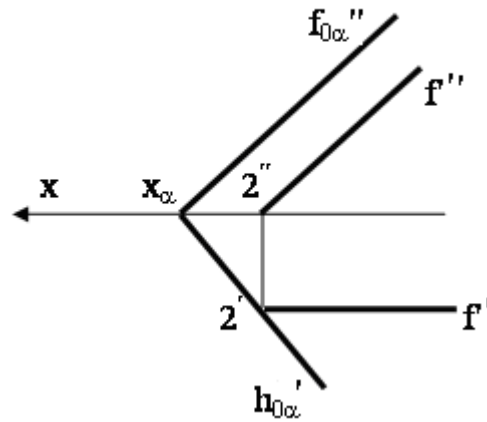
Жазықтықтың фронтальдарын салу горизонтальдары сияқты анықталады. 54-ші суретте ABC үш бұрышымен берілген жазықтықтың B ұшы арқылы фронталь жүргізу керек.

Жазықтықтың фронталі деген π_2 фронталь жазықтығына параллель түзу болғандықтан, осы түзудің f' горизонталь проекциясын $f'2' \perp f'f'$ жүргізу арқылы аламыз. Осы фронтальдың f'' фронталь проекциясын салу үшін $2''$ нүктесін саламыз және f'' пен $2''$ түзуін жүргіземіз. Салынған $f2$ түзуі жазықтықтың фронталі болып табылады.

Егер жазықтық ізімен берілсе, оның фронталін салу керек. Жазықтықтың фронталь ізі оның фронтальдарының бірі (нольдік фронталь) болады. Сондықтан жазықтықтың фронталін салу осы түзу сияқты, оның фронталь ізіне параллель жүргізілген түзу болады. 55-шы суретте фронтальдың фронталь проекциясы f'' жазықтықтың фронталь ізіне $f_{0\alpha}''$ параллель, ал горизонталь проекциясы f' OX өсіне параллель болады.



Сурет 54



Сурет 55

Ескерту: Жазықтық жалпы жағдайда орналасқанда горизонтальдың фронталь проекциясы (фронтальдың горизонталь проекциясы) OX осіне үнемі параллель болады.

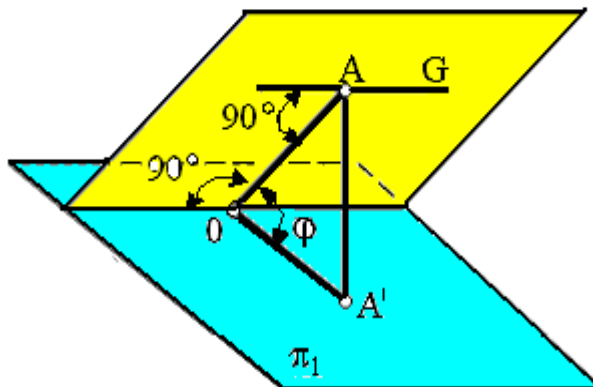
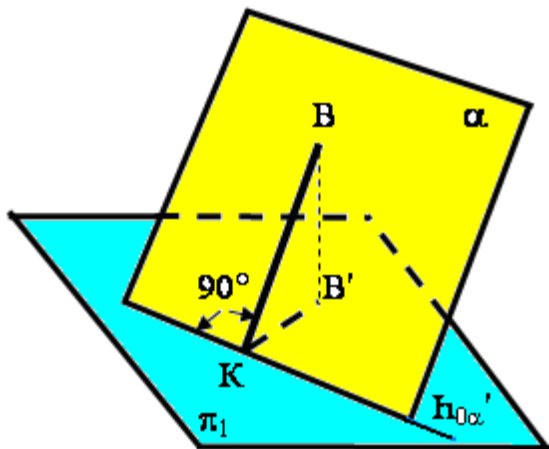
Берілген жазықтықтың проекция жазықтығына ең үлкен көлбеу сызығы дегеніміз – жазықтықта жатқан және сол жазықтықтың негізгі түзулеріне перпендикуляр болатын түзулер. Көбінесе, жазықтықтың горизонталь проекциясындағы түзулердің түсуін, түзулердің сырғанау сызығы деп атайды.

π_1 , π_2 , π_3 проекция жазықтықтарына ең үлкен көлбеу бұрыш жасайтын сызықтар деп осы жазықтықтарға тиісті болатын және жазықтықтың горизонтальдарына, фронтальдарына немесе профильдеріне перпендикуляр болатын түзулерді айтады.

Жазықтықтың ең үлкен сырғу сызығы – дегеніміз жазықтықтың горизонтальдарына перпендикуляр болатын жазықтыққа тиісті түзу.

Жазықтықтың горизонтальдарына перпендикуляр болғанда, π_1 проекция жазықтығымен жасаған ең үлкен сырғу бұрышы анықталады. Жазықтықтың фронтальдарына перпендикуляр болғанда, π_2 проекция жазықтығымен жасаған ең үлкен көлбеу бұрыш анықталады. Жазықтықтың профильдарына перпендикуляр болғанда, π_3 проекция жазықтығымен жасаған ең үлкен көлбеу бұрыш анықталады. Проекция жазықтықтарына ең үлкен көлбеу бұрыш жасайтын сызықтарды салу үшін, осы жазықтықтардың іздерін алуға болады. Жоғарыда айтылғандай π_1 проекция жазықтығымен жасаған ең үлкен көлбеу бұрыш жасайтын сызықтарды ең үлкен сырғу сызықтары деп атайды.

Жазықтықтардың берілуіне байланысты ең үлкен сырғу сызығының фронталь проекциясы әр түрлі орналасуы мүмкін. 56-ші суретте α жазықтығының $BK \perp h_{0\alpha}'$ перпендикуляр болғандықтан, α және π_1 жазықтықтарынан құралған $\angle BKB'$ екі қырлы сызықтық бұрыш. Жазықтықтың ең үлкен сырғу сызығын салу үшін, сол жазықтықтың деңгейлік түзуін салу керек.



Сурет
56
Сурет
57

Тік бұрышты проекциялау ережелеріне байланысты ең үлкен сырғу сызығының горизонталь проекциясы, осы жазықтықтың горизонтальдарының горизонталь проекцияларына немесе горизонталь ізіне перпендикуляр.

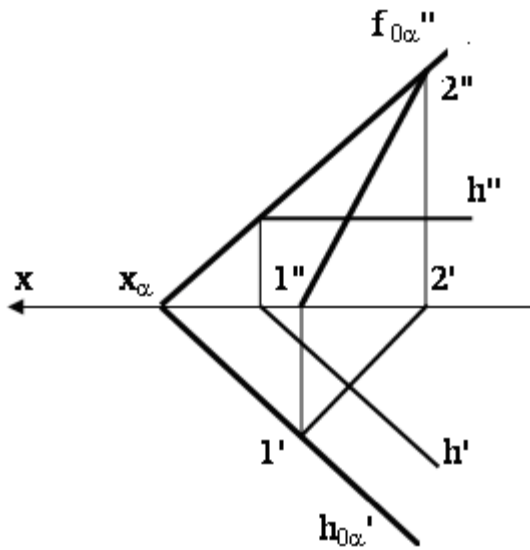
Аналитикалық дәлелдеулер бойынша, фронталь жазықтық пен жазықтықтың фронталь проекциясы арқылы түзу бұрышын табуға болады. Жазықтықтың берілген нүктесі арқылы тек қана бір ең үлкен сырғу сызығын салуға болады.

Ең үлкен сырғу сызығы екі қырлы бұрыштың арасындағы бұрыштың шамасын анықтауға қызмет етеді. Түзу мен жазықтық проекциясы арасындағы бұрыш 66-ші суретте ϕ -ға тең болады.

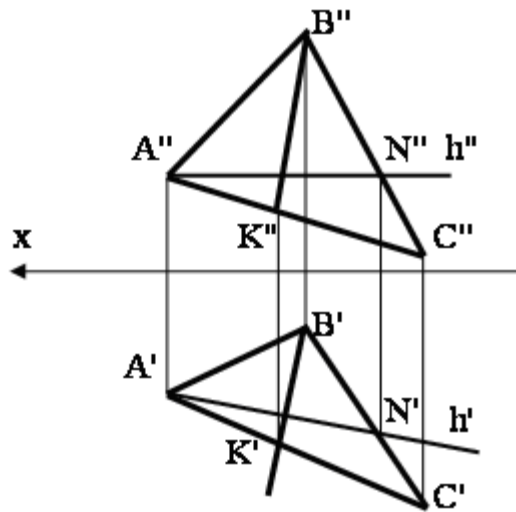
Ең үлкен бұрыш жасайтын сызықпен горизонталь арасындағы тік бұрыш π_1 горизонталь проекция жазықтығына сол сияқты π_2 , π_3 проекция жазықтығына өзгеріссіз проекцияланады. Жеке жағдайда, ең үлкен бұрыш жасап түсетін сызық горизонталь жазықтық проекциясы, жазықтықтың ең үлкен көлбеу бұрышы деп аталады.

Жазықтықта берілген нүкте арқылы тек бір ғана көлбеу сызық немесе фронталь проекция жазықтығына еніс сызық салуға болады. 58-шы суретте тік бұрышты проекциялау негізінде, горизонтальдің горизонталь проекциясы, ең үлкен сырғу сызығының горизонталь проекциясына перпендикуляр.

ABC үшбұрышымен берілген α жазықтығының B нүктесі арқылы ең үлкен көлбеу түзуін жүргіземіз, 59-ші суретте. Алдымен жазықтықтың AN ($A'N'$, $A''N''$) горизонталі жүргізіледі, содан кейін $A'N'$ проекциясына перпендикуляр болатын $B'K'$ жүргіземіз. BK ең үлкен көлбеу сызықтың $B'K'$ проекция арқылы $B''K''$ түзуін саламыз.



Сурет 58



Сурет 59

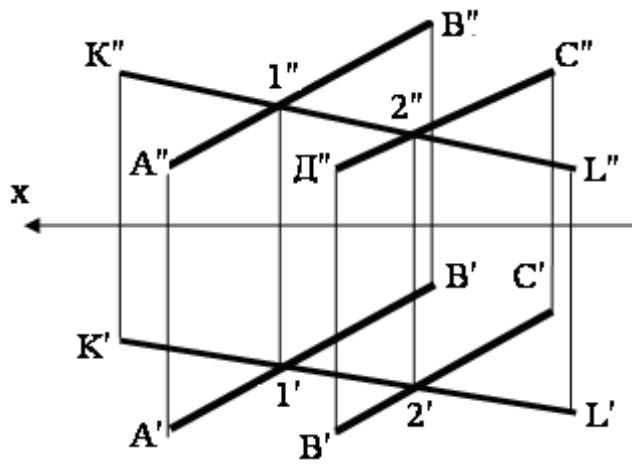
4.6 Жазықтыққа тиісті түзу мен нүктені кескіндеу

Жазықтықтағы түзу.

1. Егер түзудің екі нүктесі жазықтыққа тиісті болса, түзу жазықтыққа тиісті болады.
2. Түзу жазықтыққа тиісті болу үшін, түзу жазықтықтың бір нүктесі арқылы өтіп, сол жазықтықта жатқан түзудің біріне параллель болуы керек.

Жазықтық АВ және СД параллель түзулермен берілген. Оның KL түзуімен қиылысқан жерінің горизонталь проекциясы $1'2'$ берілсе 60-ші суретте, оның фронталь проекциясын табу керек.

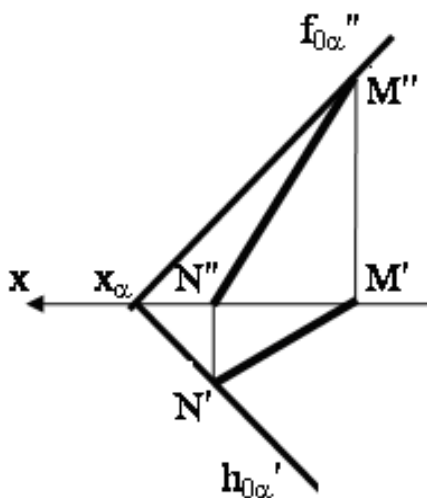
Байланыс сызығы арқылы бірінші және екінші нүктелердің фронталь проекцияларын $1''2''$ табамыз. Параллель түзулермен берілген жазықтықпен KL түзуінің қиылысу сызығы, 1,2 нүктелер жазықтыққа тиісті. $1''$ және $2''$ нүктелер арқылы түзудің фронталь проекциясын саламыз.



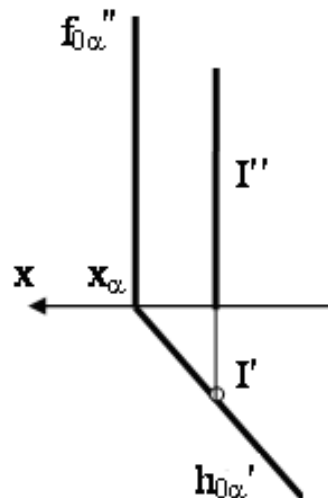
Сурет 60

Егер жазықтыққа тиісті түзу 61-ші суреттегідей MN іздерімен берілсе, оның іздері жазықтықтардың аттас іздерінде жатады немесе іздердің біреуімен ортақ нүктесі болып, ал екіншісі келесі ізге параллель болады.

62-ші суретте I түзуінің горизонталь проекциясы I' жазықтықтың горизонталь ізіне $h_{0\alpha}'$ тиісті, ал фронталь проекциясы I'' жазықтықтың фронталь ізіне $f_{0\alpha}''$ параллель болады.



Сурет 61



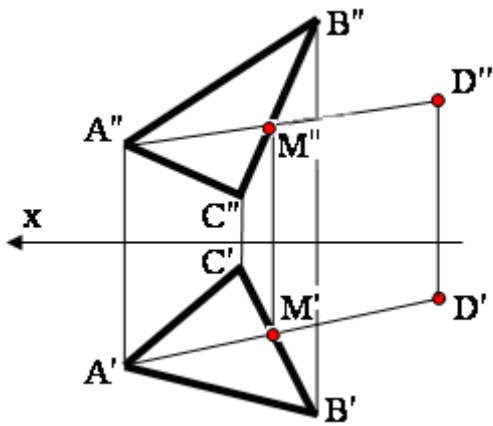
Сурет 62

Жазықтықтағы нүктелер.

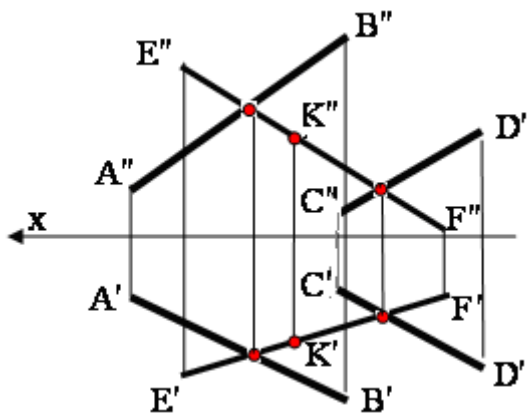
Берілген жазықтықта жатқан нүктені салу үшін, алдымен жазықтыққа тиісті түзу сызады да, осы түзу арқылы нүктені анықтайды.

63-ші суретте жазықтық ABC үшбұрышымен берілген, осы жазықтыққа тиісті болатын D нүктесінің горизонталь проекциясы берілген. D нүктесінің фронталь проекциясын салу керек. Алдымен берілген жазықтыққа тиісті болатын қандайда бір түзуді D нүктесі арқылы жүргізу керек. Бұл үшін A' және D' нүктелері арқылы түзу жүргіземіз де, A'D' түзуімен B'C' түзуінің қиылысқан жерінен M' нүктесін белгілейміз. B''C'' түзуінің бойына нүктенің фронталь проекциясын M'' саламыз да, берілген жазықтықта орналасқан MA түзуін аламыз. Іздеп отырған D нүктесінің фронталь проекциясы D'' осы түзудің фронталь проекциясында орналасады.

β жазықтығы 64-ші суретте AB және CD параллель түзулерімен берілген, осы жазықтыққа тиісті K нүктесінің горизонталь проекциясы ғана берілген, фронталь проекциясын табу керек. β жазықтығына тиісті болатын қандайда бір EF түзуін K нүктесінің горизонталь проекциясы арқылы жүргізіп, осы түзудің фронталь проекциясынан K нүктесінің фронталь проекциясын табамыз. Сонда K нүктесі β жазықтығына тиісті болады.

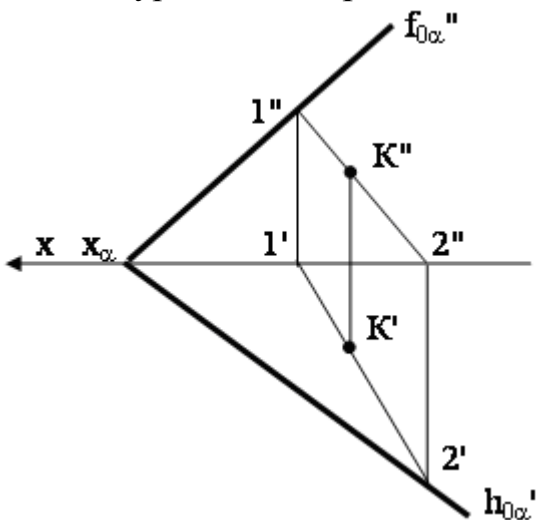


Сурет 63

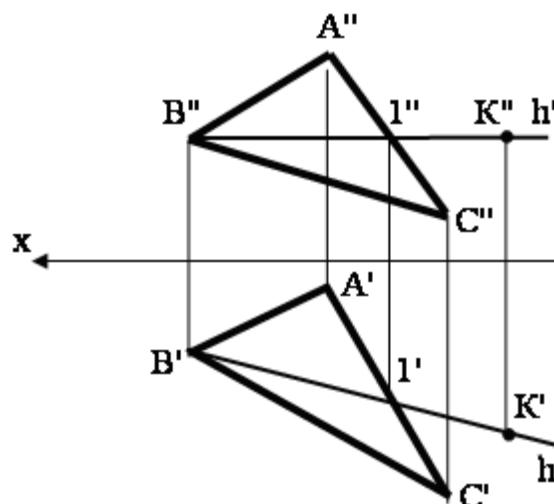


Сурет 64

Нүкте жазықтыққа тиісті болады, егер ол сол жазықтықта жатқан түзуге тиісті болса. 65-шы суретте 1,2 түзулері жазықтыққа тиісті, яғни «К» нүктесі жазықтыққа тиісті. 66-шы суретте «К» нүктесі жазықтықтың горизонталіне тиісті



Сурет 65

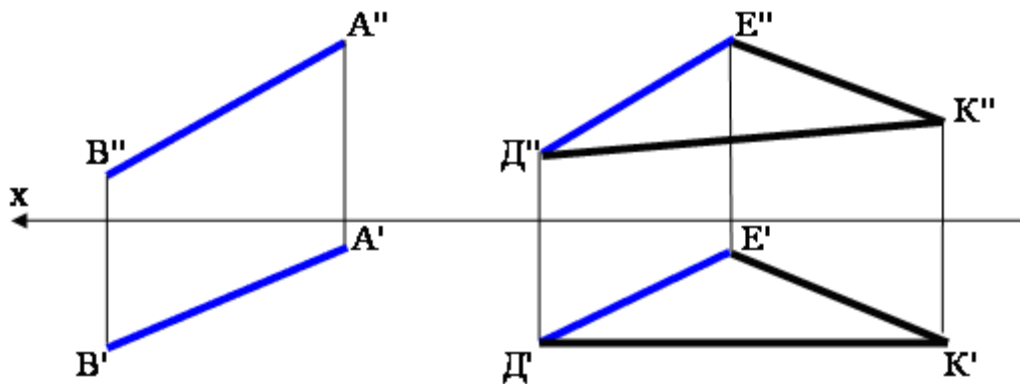


Сурет 66

4.7 Түзудің жазықтыққа параллельдігі

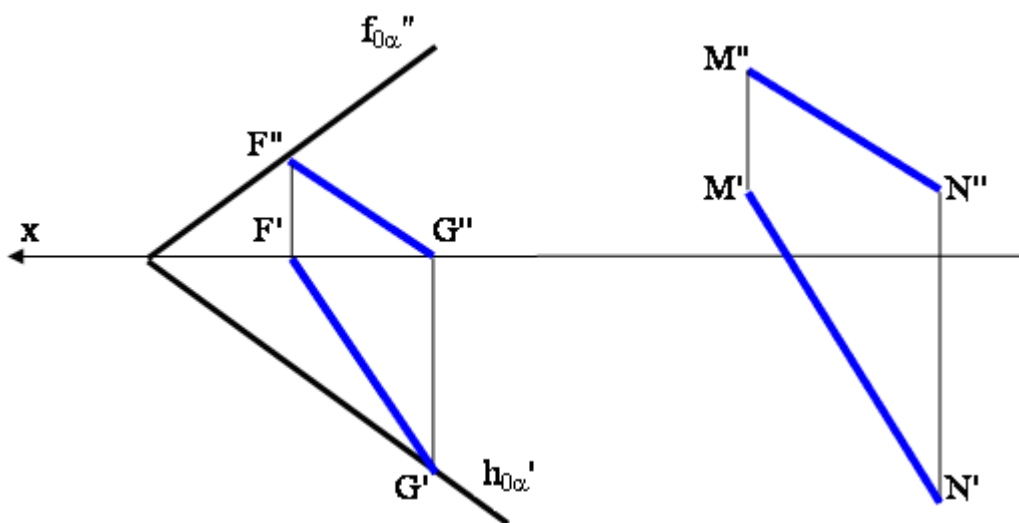
Егер ол осы жазықтықта жатқан қандайда бір түзуге параллель болса, түзу жазықтыққа параллель. 67-ші суретте ДЕК үшбұрышы арқылы берілген жазықтыққа параллель АВ түзуін жүргізу қажет.

Ол үшін A'' нүктесі арқылы $A''B''$ түзуін жүргіземіз, бұл кез-келген түзуге параллель. DE түзуі ($A''B'' \parallel D''E''$). A' арқылы $D'E'$ параллель етіп ($A'B' \parallel D'E'$) түзу жүргіземіз, іздеп отыруға AB түзуі параллель DEC үшбұрышына. Берілген жазықтыққа қанша болса да параллель түзулер жүргізуге болады.



Сурет 67

Сызбада түзудің жазықтыққа параллель екендігін анықтау үшін, 68-ші суреттегідей берілген MN түзудің бір проекциясына параллель етіп, α -жазықтығына тиісті FG түзуін жүргіземіз, егер түзудің аттас проекциялары параллель болса түзу жазықтыққа параллель, егер түзудің аттас проекциялары параллель болмаса түзу жазықтыққа параллель емес.



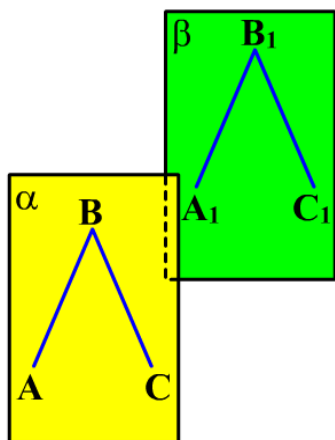
Сурет 68

4.8 Екі жазықтықтың өзара параллель орналасуы

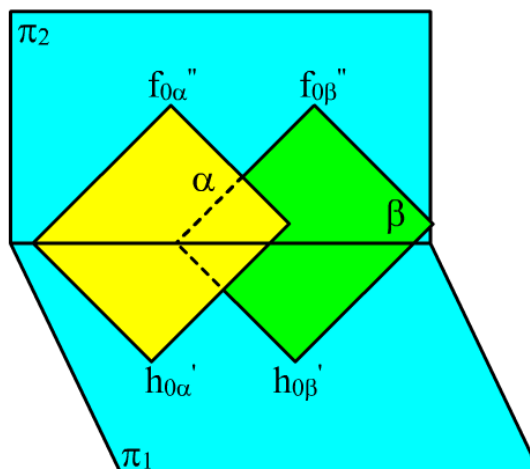
Екі жазықтық өзара параллель және қиылысып орналасуы мүмкін. Егер 69-ші суреттегі α және β жазықтықтары өзара параллель болса, онда әрқашан олардың әрбіреуіне, бір жазықтықтағы екі түзу екінші жазықтықтағы екі түзуге параллель болатындай етіп, өзара қиылысатын екі түзу жүргізуге болады.

Осындай түзулер ретінде, екі жазықтықтың іздерін алуға болады ($h_{0\alpha}' \parallel h_{0\beta}'$, $f_{0\alpha}'' \parallel f_{0\beta}''$): егер бір жазықтықтың өзара қиылысатын екі ізі, басқа жазықтықтың аттас іздеріне өзара параллель болса, онда екі жазықтық бір-біріне параллель. Егер осы

жазықтықтарды ізбен көрсетсе 70-ші суретте фронталь ізі де, горизонталь ізі де өзара параллель болады.



Сурет 69

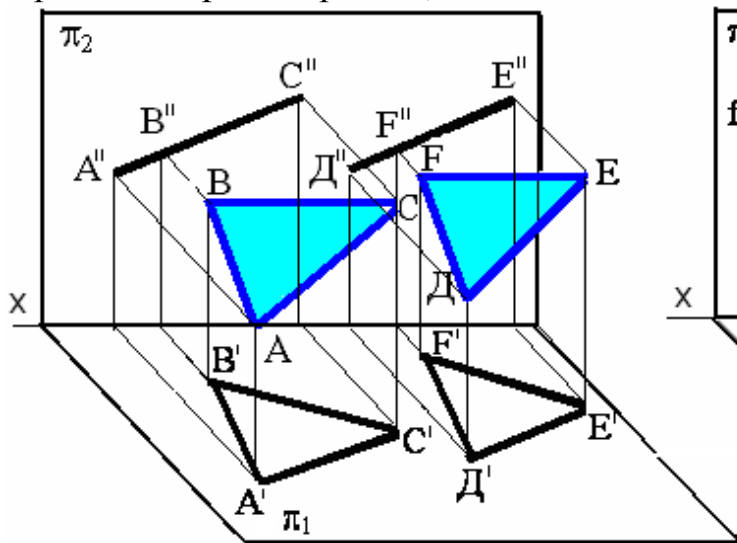


Сурет 70

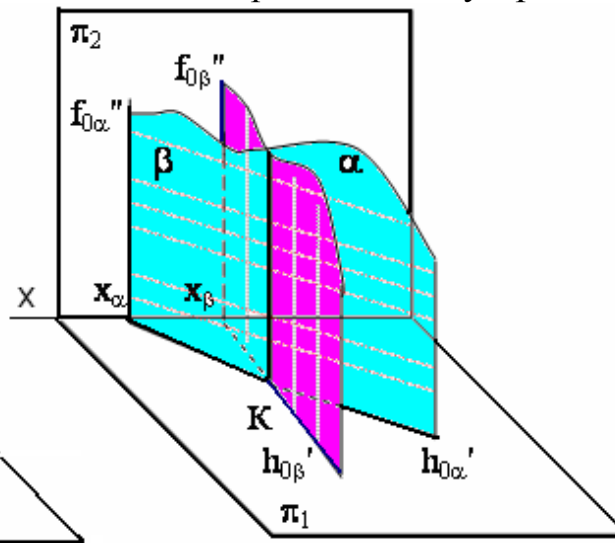
71-ші суретте ABC және DEF үш бұрыштарымен берілген, өзара параллель жазықтықтар көрсетілген. A''B''C'' және D''E''F'' параллельдігі, фронталь проекцияларының параллельдігімен анықталады

Жазықтықтардың өзара қиылысу жағдайын қарастырамыз.

Жазықтықтар ізімен берілгенде, олардың қиылысатындығын жеңіл анықтауға болады: егер қандайда бір аттас іздер қосағы өзара қиылысса, онда жазықтықтар қиылысады. 72-ші суретте $f_{0\alpha}'' \parallel f_{0\beta}''$, бірақ α және β жазықтықтары өзара қиылысады. Берілген K нүктесі арқылы, яғни жазықтықтың аттас іздерінің қиылысу нүктесі.



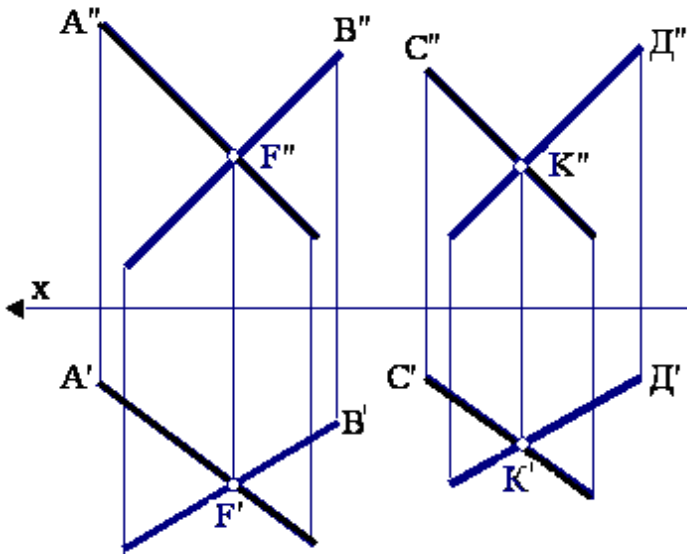
Сурет 71



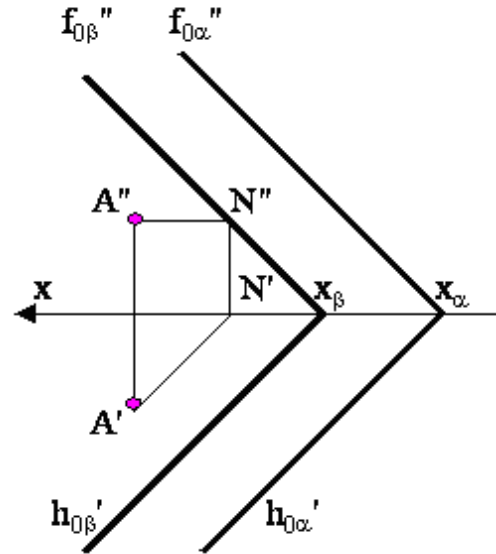
Сурет 72

73-ші суретте AF және BF қиылысатын түзулермен берілген жазықтыққа параллель жазықтық жүргізу қажет болса, K нүктесі арқылы СК және ДК түзулерін AF және BF түзулерімен анықталған жазықтық берілген жазықтыққа параллель болады.

74-ші суретте А нүктесі арқылы β жазықтығын α жазықтығына параллель етіп жүргізу керек. А нүктесі арқылы α жазықтығының негізгі түзуіне параллель болатын түзу жүргіземіз. Горизонталь AN түзуімен берілген, бұнда $A'N' \parallel h_{0\alpha}'$. N нүктесі AN горизонталінің фронталь ізі, осы нүкте арқылы $f_{0\beta}'' \parallel f_{0\alpha}''$ ізін, ал x_β арқылы $h_{0\beta}' \parallel h_{0\alpha}'$ жүргіземіз. β және α жазықтықтарының аттас іздері параллель болғандықтан жазықтықтар өзара параллель.



Сурет 73

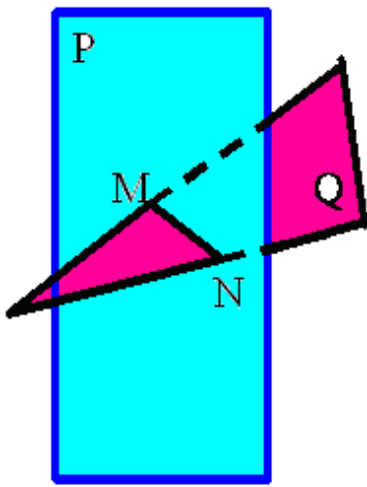


Сурет 74

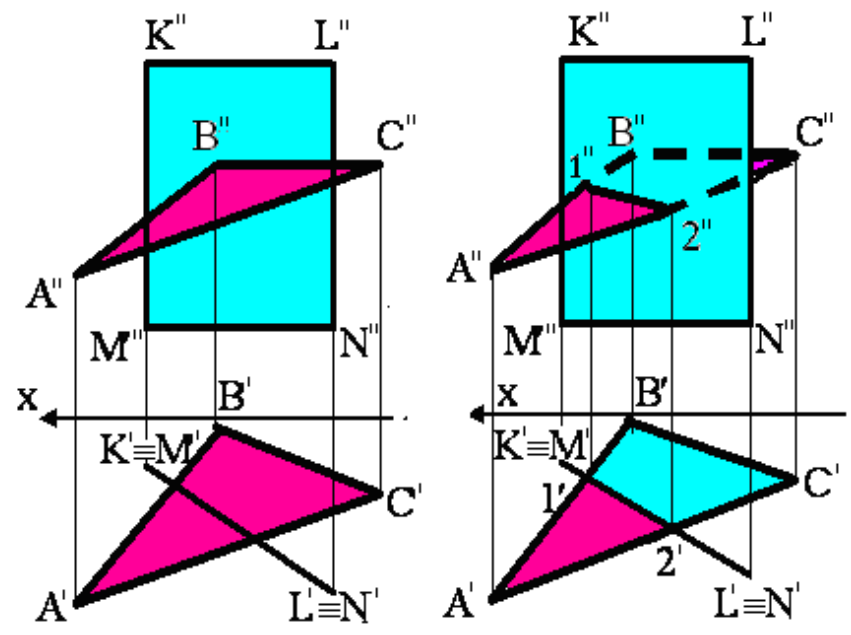
Екі жазықтық қиылысқанда түзу сызық шығады және екі жазықтыққа да тиісті болатын екі нүкте арқылы анықталады. 75-шы суретте P және Q екі жазықтықтың қиылысу сызығын салу үшін, екі жазықтыққа да тиісті екі нүктені саламыз. Осы M және N нүктелер қажетті сызықты анықтайды.

76-ші суретте ABC үшбұрышы және KLMN төрт бұрышымен берілген жазықтықтардың қиылысу сызығын табу керек. Сызуда KLMN жазықтығы проекциялаушы жазықтық. Оның горизонталь проекциясы түзу сызық.

Жазықтықтардың қиылысу сызығын бір жазықтықтың екі түзуі екінші жазықтықпен қиылысқаны сияқты анықтауға болады. ABC үш бұрышының AB және AC түзулері KLMN төрт бұрышымен қиылысу нүктелерін анықтаймыз. AB түзуінің KLMN төртбұрышымен қиылысу нүктесі $1(1',1'')$, ал AC түзуінің KLMN төрт бұрышымен қиылысу нүктесі $2(2',2'')$. ABC үшбұрышы мен KLMN төрт бұрышының қиылысу сызығы 1,2 түзуі. Жалпы жағдайда екі жазықтықтың қиылысу сызығын табу үшін, жазықтықтардың екеуіне де тиісті болатын, екі нүктені табу керек. Осы нүктелер қиылысу сызығының нүктелері болып табылады. Көмекші қиюшы жазықтықтарды таңдаған кезде, оларды бір-біріне параллель етіп орналастырған ыңғайлы, есепті шығару жолын жеңілдетеді. α_1 және α_2 жазықтықтары фронталь проекциялаушы олардың орнына горизонталь проекциялаушы немесе т.с.с. жазықтықтарды жүргізуге болады, салыну жолы сақталады.



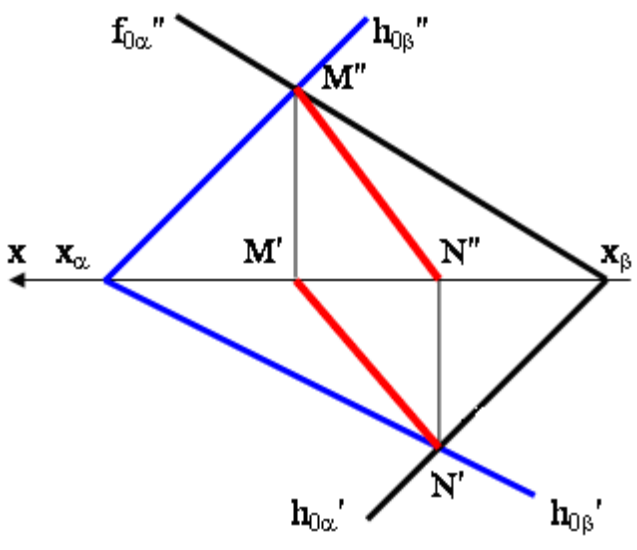
Сурет 75



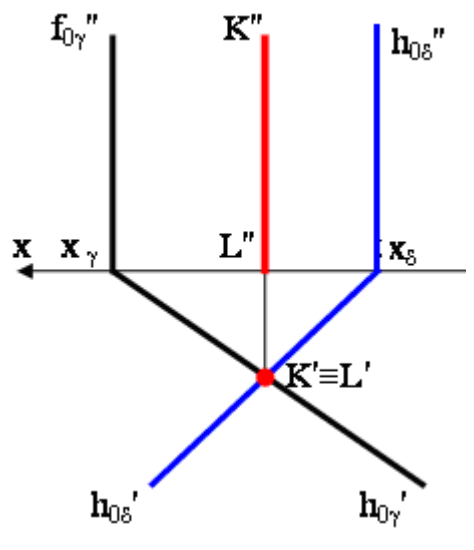
Сурет 76

Егер жазықтық ізбен берілсе, жазықтықтардың қиылысу сызығын анықтайтын нүкте жазықтықтың аттас іздерінің қиылысу нүктесі болып табылады, жазықтықтың аттас іздерінің қиылысу нүктесі.

Жалпы жағдайда орналасқан 77-ші суретте α және β жазықтықтары қиылысу сызығы MN түзуі арқылы анықталған. M және N нүктелері екі жазықтыққа да тиісті. 78-шы суретте жеке жағдайда орналасқан γ және δ жазықтықтары горизонталь проекциялаушы жазықтықтар қиылысу сызығы KL түзуі арқылы анықталған. K және L нүктелері екі жазықтыққа да тиісті.



Сурет 77

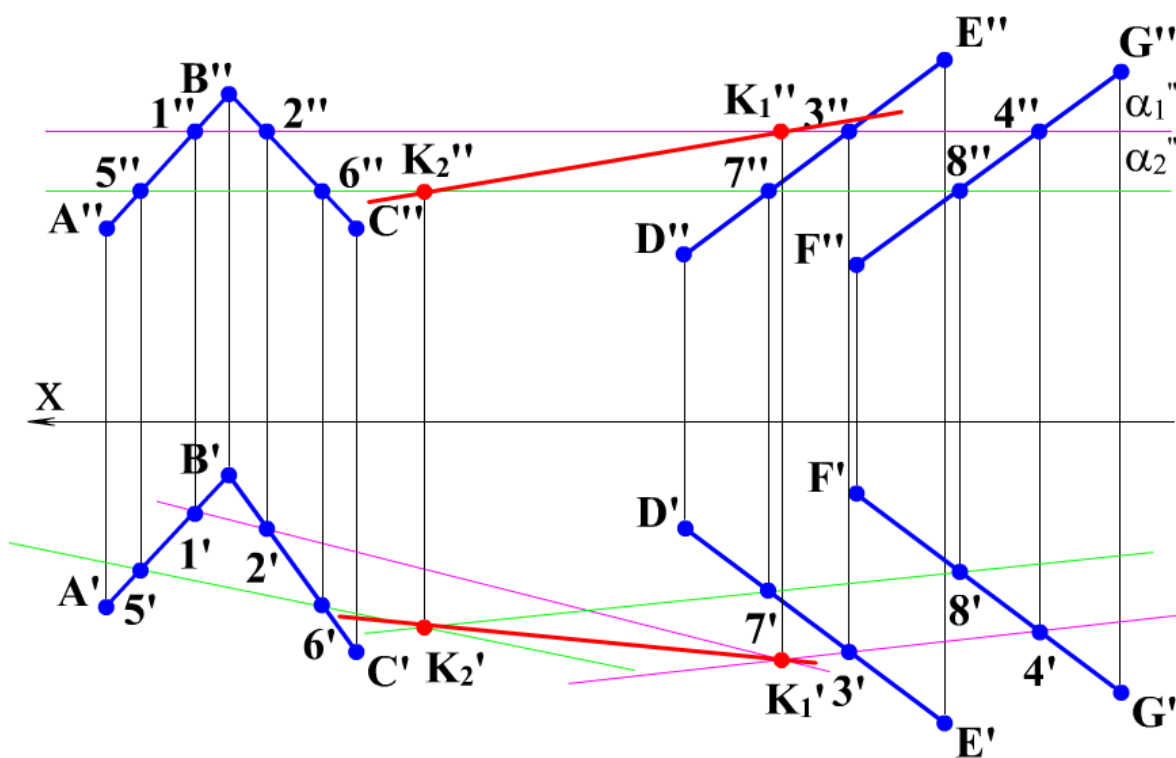


Сурет 78

Егер 79-шы суретте, қандайда бір жазықтық β , екі қиылысатын түзулермен $AB \times BC$, ал екінші γ -параллель түзулермен $DE \parallel FG$ берілсе. β және γ

жазықтықтарының қиылысу сызығы K_1, K_2 түзуі болады. K_1 және K_2 нүктелерінің орнын анықтау үшін, α және β жазықтықтарын қиып өтетін, көмекші екі горизонталь жазықтықтар (α_1, α_2) жүргіземіз. β және γ жазықтықтарын α_1 жазықтығы қиғанда түзудің проекциялары $1''2'', 1'2'$ және $3''4'', 3'4'$ пайда болады. Бұл түзулер α_1 жазықтығында орналасқан, олар өзара қиылысып, β және γ жазықтықтарының қиылысу сызығының K_1 нүктесін береді. β және γ жазықтықтарын α_2 жазықтығы қиғанда түзудің проекциялары $5''6'', 5'6'$ және $7''8'', 7'8'$ пайда болады. Бұл түзулер, α_2 жазықтығында орналасқан, олар өзара қиылысып, β және γ жазықтықтарының қиылысу сызығы K_2 нүктесін береді.

K_1, K_2 проекциялары табылғаннан кейін, $\alpha_1''\alpha_2''$ іздерінен K_1'' және K_2'' проекцияларын табамыз. Осымен K_1', K_2' және K_1'', K_2'' іздеп отырған β және γ жазықтықтарының қиылысу сызығы анықталады.



Сурет 79

4.9 Жазықтық пен түзудің қиылысу нүктесі

Жазықтықпен түзудің қиылысу нүктесін салу дегеніміз берілген жазықтыққа да түзуге де тиісті ортақ нүктені табу. Р жазықтығымен түзуге ортақ нүкте K нүктесі.

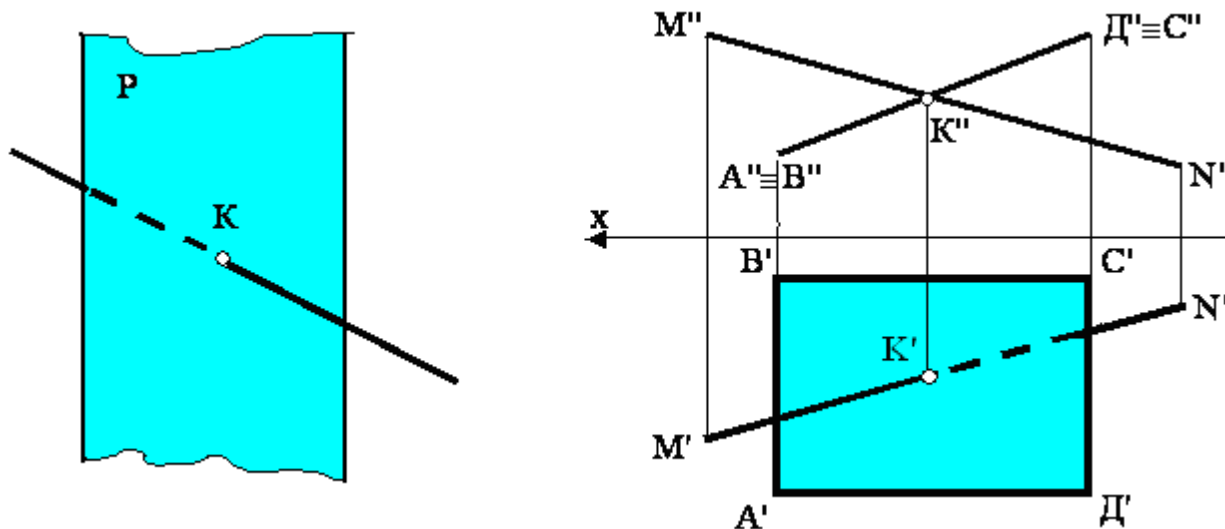
Түзудің проекциялаушы жазықтықпен қиылысу нүктесін табуға арналған есепті қарастырамыз. 80-ші суретте MN түзуінің $ABCD$ төрт бұрышы арқылы берілген жазықтықпен қиылысу нүктесін табу керек.

Сызбада $ABCD$ жазықтығы фронталь проекциялаушы, сондықтан $ABCD$ төртбұрышының фронталь проекциясы түзу сызық $A''\equiv B'', D''\equiv C'', M''N''$ қиылысады $A''\equiv B'', D''\equiv C''$ жазықтықтың фронталь проекциясымен қиылысқан жерден K'' нүктесін табамыз. K' нүктесі қиылысу сызығы арқылы табылады $K' \in M'N'$. Енді MN түзуінің

жазықтыққа байланысты көрінуін анықтаймыз. Фронталь проекцияға қарап, түзудің жартысы М нүктесінен К нүктесіне дейін жазықтықтан жоғары орналасқан десек, горизонталь проекциясында ол көрінетін болады және негізгі тұтас сызықпен белгіленеді. К нүктесінен басталған түзудің екінші жартысы көрінбейді, яғни жазықтықтың астында орналасқан және штрихпен сызылады.

Жалпы жағдайдағы жазықтықпен түзудің қиылысу нүктесін салу үшін келесі жағдайлар орындалу керек:

1. Берілген түзу арқылы көмекші жазықтық жүргізу керек.
2. Жазықтық пен көмекші жазықтықтың қиылысу сызығын салу керек.
3. Түзулердің қиылысқан жерінде нүктені табу керек.
4. Түзудің жазықтыққа байланысты көрінуін анықтау керек.



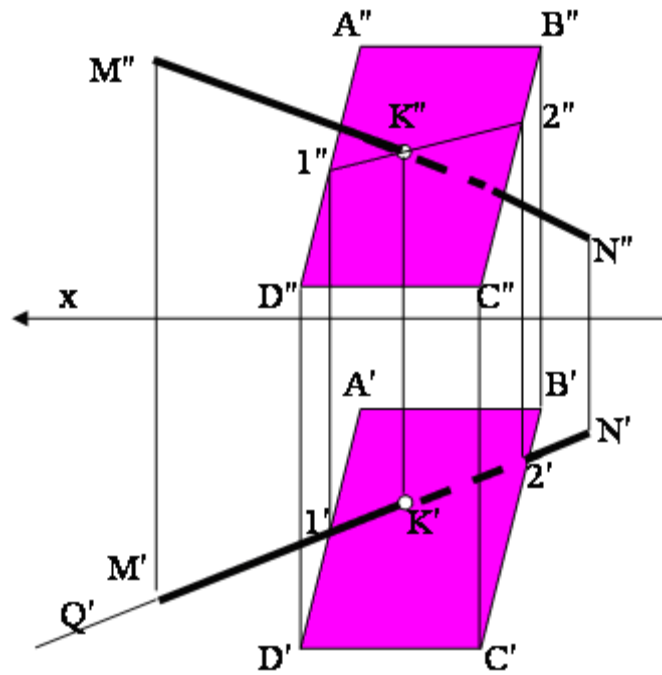
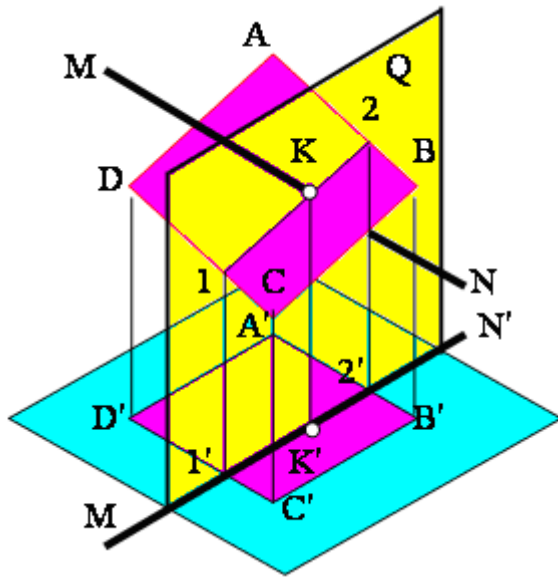
Сурет 80

Жалпы жағдайда орналасқан ABCD төртбұрышымен берілген жазықтықпен MN түзуінің қиылысу нүктесін анықтау үшін келесі жағдайлар орындалуы керек. Көмекші жазықтық ретінде проекциялаушы жазықтықты аламыз 81-ші суретте. Қиылысу сызығын салу үшін, екі жазықтыққа да тиісті екі нүктені саламыз. Осы нүктелер қажетті сызықты анықтайды.

Берілген MN түзу арқылы көмекші жазықтық жүргіземіз.

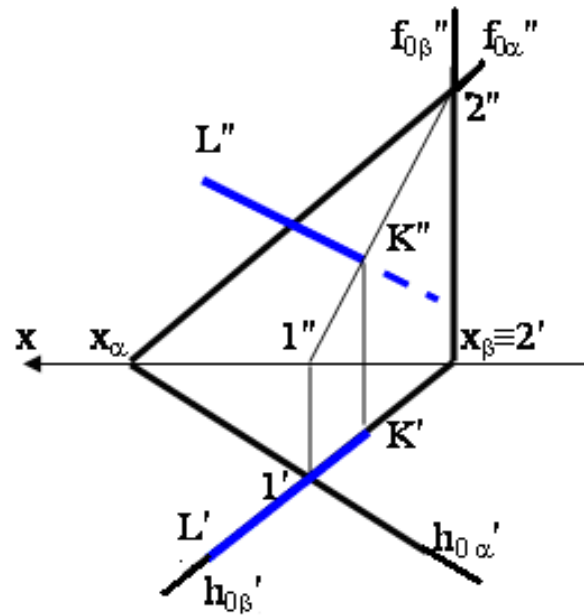
Q горизонталь проекциялаушы

1. Көмекші Q горизонталь проекциялаушы жазықтықпен ABCD төртбұрышының қиылысу 1, 2 сызығын саламыз.
2. Берілген MN түзуі мен 1,2 сызылған түзудің қиылысқан жеріндегі К нүктені табамыз.
3. Түзудің жазықтыққа байланысты көрінуін анықтау үшін, горизонталь проекциядан $1' \equiv 3'$ екі нүктені аламыз. Олардың фронталь проекциялары $1'' \in A''D''$, ал $3'' \in M''N''$. Сондықтан фронталь проекцияда МК көрінбейді, ал KN көрінеді. Горизонталь проекциясы да осы тәсілмен анықталады.



Сурет 81

82-ші суретте ізбен берілген α жазықтығы мен L түзуінің қиылысу сызығын көмекші горизонталь проекциялаушы жазықтық жүргізу арқылы анықтаймыз. Қиылысу нүктесі болатын K нүктесі α мен β жазықтықтарының қиылысу сызығы $1, 2$ түзуі мен L түзуінің қиылысу нүктесі болады



Сурет 82

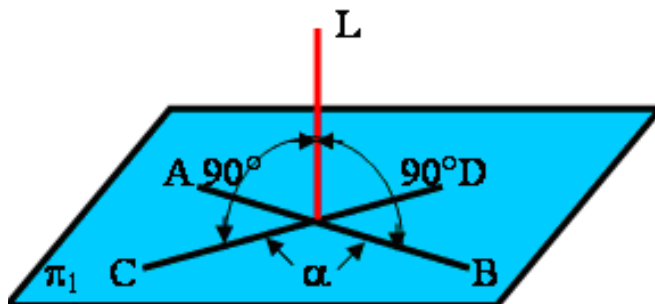
4.10 Түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық белгісі

Жазықтыққа түсірілген перпендикуляр осы жазықтықта жүргізілген кез-келген түзуге перпендикуляр. Жалпы жағдайдағы жазықтыққа түсірілген перпендикулярдың проекциясы, осы жазықтықтың негізгі сызықтарының: горизонтальдарының, фронтальдарының, профильдерінің аттас проекцияларына перпендикуляр болады.

Егер жазықтықты қиятын түзу осы жазықтықта жатқан қиылысатын екі түзуге перпендикуляр болса, ол түзу жазықтыққа да перпендикуляр болады.

1. Түзудің горизонталь проекциясы жазықтықтың горизонталінің горизонталь проекциясына перпендикуляр болады.
2. Түзудің фронталь проекциясы жазықтықтың фронталінің фронталь проекциясына перпендикуляр болуы керек.

Түзу жазықтыққа перпендикуляр болу үшін 83-ші суреттегідей сол жазықтықта жатқан қиылысатын екі түзуге перпендикуляр болуы керек. Жазықтықта жатқан түзу мен оған түсірілген перпендикуляр, тік бұрышты және нақты шамамен 90° -та проекцияланады, егер оның бір жағы проекция жазықтығына параллель болса.



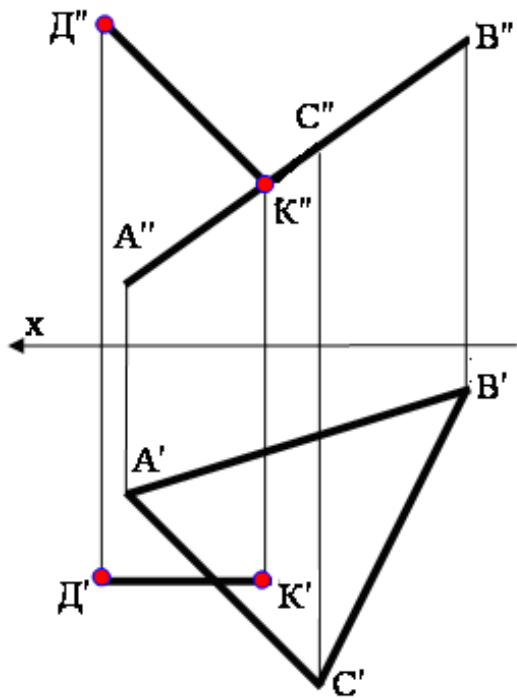
Сурет 83

Сызбада жазықтыққа перпендикуляр түсіру үшін проекция жазықтығына параллель кез-келген түзуді алуға болады, яғни деңгейлік түзулерді: горизонталь мен фронтальді перпендикуляр етіп жүргізеді. 84-шы суретте ABC үшбұрышына Д нүктесі арқылы перпендикуляр түсіру керек. ABC үшбұрышы фронталь проекциялаушы жазықтық болғандықтан, оның Д'' фронталь проекциясынан А''В'' түзуге перпендикуляр етіп жүргіземіз, ал Д' горизонталь проекциясынан ОХ өсіне параллель етіп жүргіземіз.

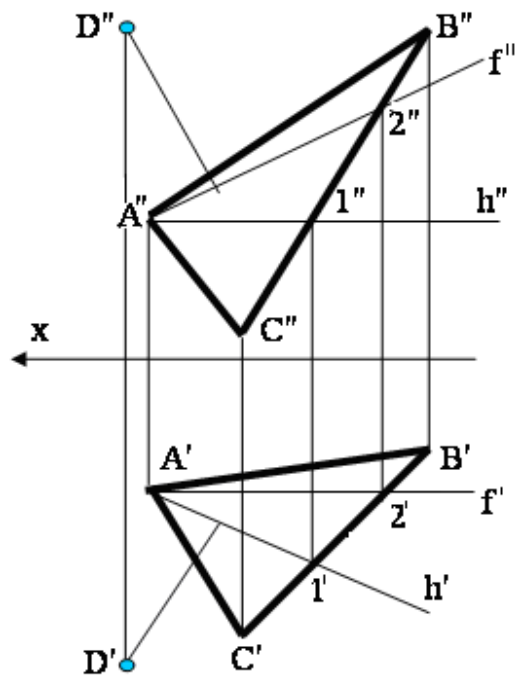
Тік бұрыш проекция өзінің нақты шамасын сақтайды, өйткені оның бір жағы фронталь проекция жазықтығына параллель, К(К'К'') перпендикулярдың табаны болып бейнеленген. Түзу жазықтыққа перпендикуляр болуы үшін, түзудің горизонталь проекциясы, горизонтальдың горизонталь проекциясына перпендикуляр болуы керек, ал түзудің фронталь проекциясы, фронтальдың фронталь проекциясына перпендикуляр болуы керек. 85-ші суретте ABC үшбұрышына Д нүктесі арқыл L-түзуін перпендикуляр етіп жүргізу үшін:

1. ABC үшбұрышына деңгейлік түзу А1 горизонталь және А2 фронталь жүргіземіз.
2. Д нүктесінің горизонталь проекциясынан Д'-тан А'1' түзуіне, фронталь проекциясынан Д''-тан А''2'' түзуіне перпендикуляр түсіреміз. Қарастырылған мысалымызда перпендикулярдың табаны табылмаған.

Перпендикулярдың табаны табу үшін перпендикулярдың жазықтықпен қиылысу нүктесін салу керек, яғни түзудің жазықтықпен қиылысу нүктесін салу керек.

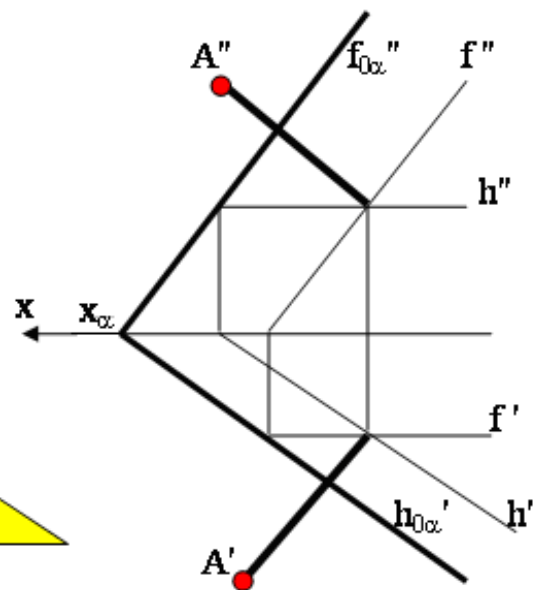
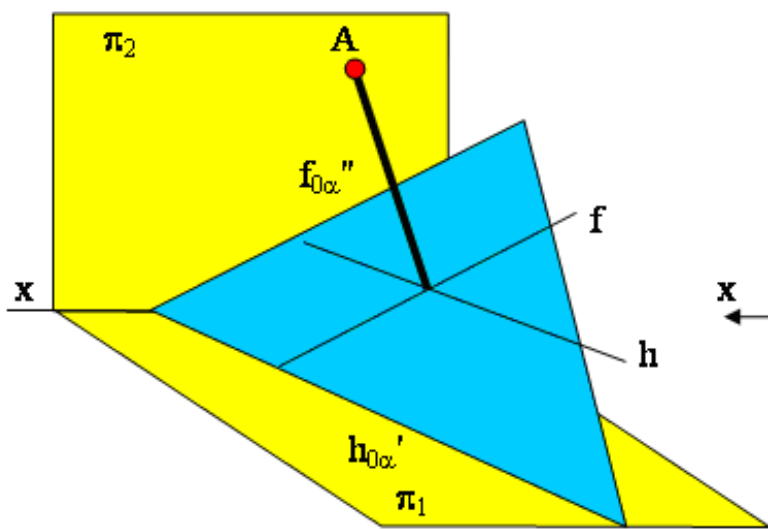


Сурет 84



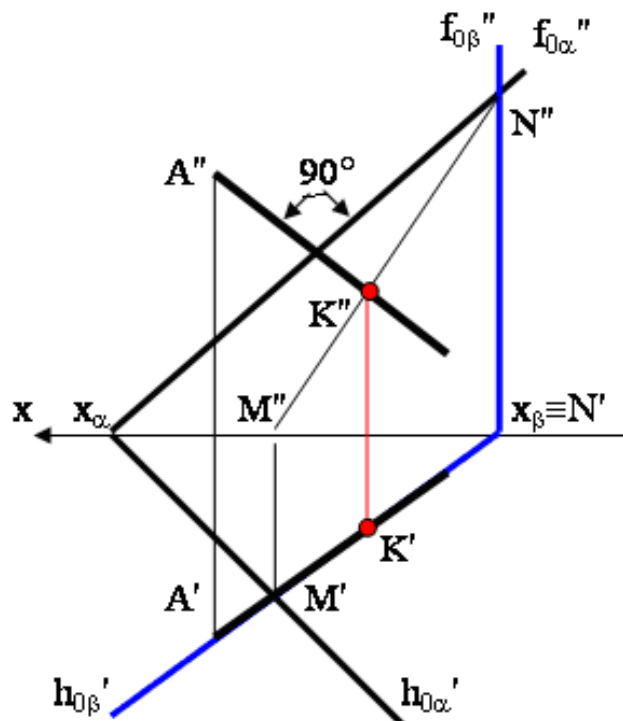
Сурет 85

Егер α жазықтығы ізімен берілсе 86-ші суретте. Осы жазықтыққа А нүктесі арқылы перпендикуляр түсірілген. Кеңістікте α жазықтығының қиылысу түзулеріне (горизонталь мен фронтальға) перпендикуляр түсірілген.



Сурет 86

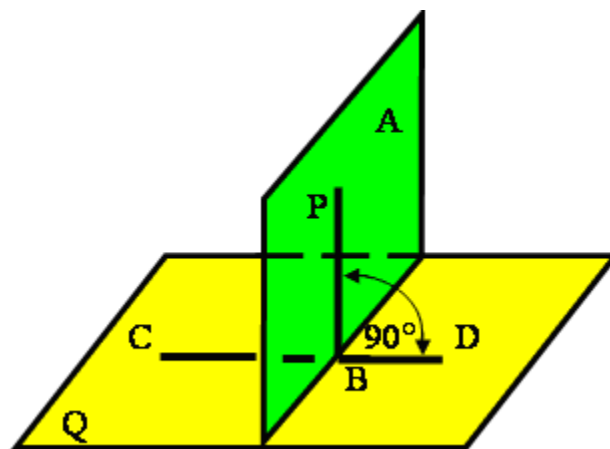
87-ші суретте α жазықтығына А нүктесінен перпендикуляр түсірілген. Перпендикулярдың табанын табу үшін, перпендикуляр арқылы көмекші горизонталь проекциалаушы β жазықтық жүргізілген. α мен β жазықтықтарының MN қиылысу сызығы табылған. А нүктесінен түсірілген перпендикулярдың MN қиылысу сызығымен қиылысқан К нүктесі α жазықтығына түсірілген перпендикулярдың табаны болып табылады. АК түзуінің нақты шамасы нүктеден жазықтыққа дейінгі ара қашықтыққа тең болады.



Сурет 87

4.11 Перпендикуляр жазықтықтар

Екі жазықтық Р мен Q перпендикуляр болады, егер Р жазықтығы Q жазықтығында жатқан CD түзуіне перпендикуляр AB түзуі арқылы өтсе. Берілген жазықтыққа перпендикуляр тұрғызу үшін 88-ші суреттегідей, алдымен берілген жазықтыққа перпендикуляр тұрғызып сол арқылы жаңа жазықтық жүргізу керек.



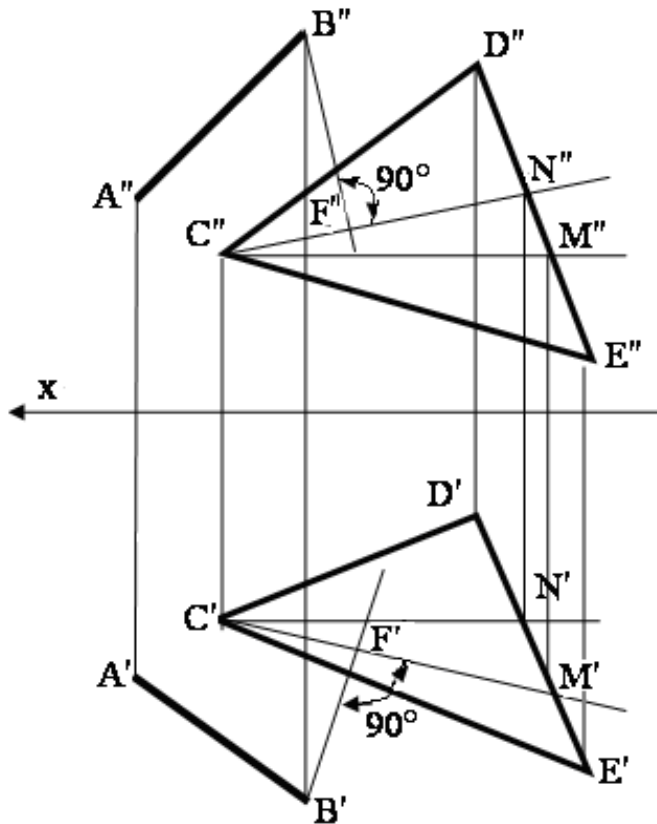
Сурет 88

Берілген жазықтыққа түзу жүргізіп, соған перпендикуляр түсіреміз.

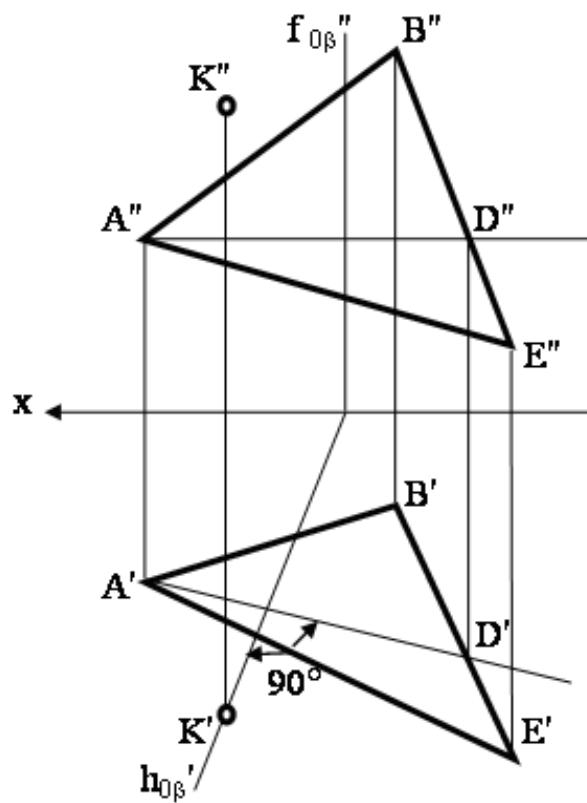
89-ші суретте CDE үшбұрышымен берілген жазықтыққа перпендикуляр болатын жазықтықты AB арқылы жүргізу керек. Іздеп отырған жазықтық AB түзуімен және үшбұрышқа түсірілген перпендикуляр арқылы анықталады.

Перпендикулярды жүргізу үшін CDE үшбұрышының CM горизонталін және CN фронталін жүргіземіз, бұнда $B''F'' \perp C''N''$ және $B'F' \perp C'M'$, онда $BF \perp CDE$ жазықтығына AB және BF қиылысатын түзулерден жасалған жазықтықтың перпендикулярлары арқылы өтеді.

90-ші суретте β горизонталь проекциялаушы жазықтығы K нүктесі арқылы ABC үшбұрышымен берілген жазықтыққа перпендикуляр жүргіземіз. Қосымша жағдай ретінде іздеп отырған жазықтықтың екі жазықтыққа да: ABC жазықтығына да, π_1 проекция да перпендикуляр болатындығы қарастырылған. Сондықтан жауап ретінде горизонталь проекциялаушы жазықтықты аламыз.



Сурет 89



Сурет 90

4.12 Перпендикуляр түзулер

Жалпы жағдайда орналасқан түзулердің арасындағы тік бұрышты проекция жазықтығына проекцияланғанда бұрмаланып проекцияланады. Сондықтан жалпы жағдайда орналасқан түзулерді перпендикуляр етіп проекциялау түзумен жазықтықтық перпендикулярлығы сияқты салынады.

Нүкте арқылы жалпы жағдайда орналасқан түзуге перпендикуляр түсіру үшін:

1. Берілген нүкте арқылы осы түзуге перпендикуляр етіп жазықтық жүргіземіз.
2. Қиылысу нүктесін табамыз.
3. Берілген нүкте арқылы және салынған нүкте арқылы түзу жүргіземіз.

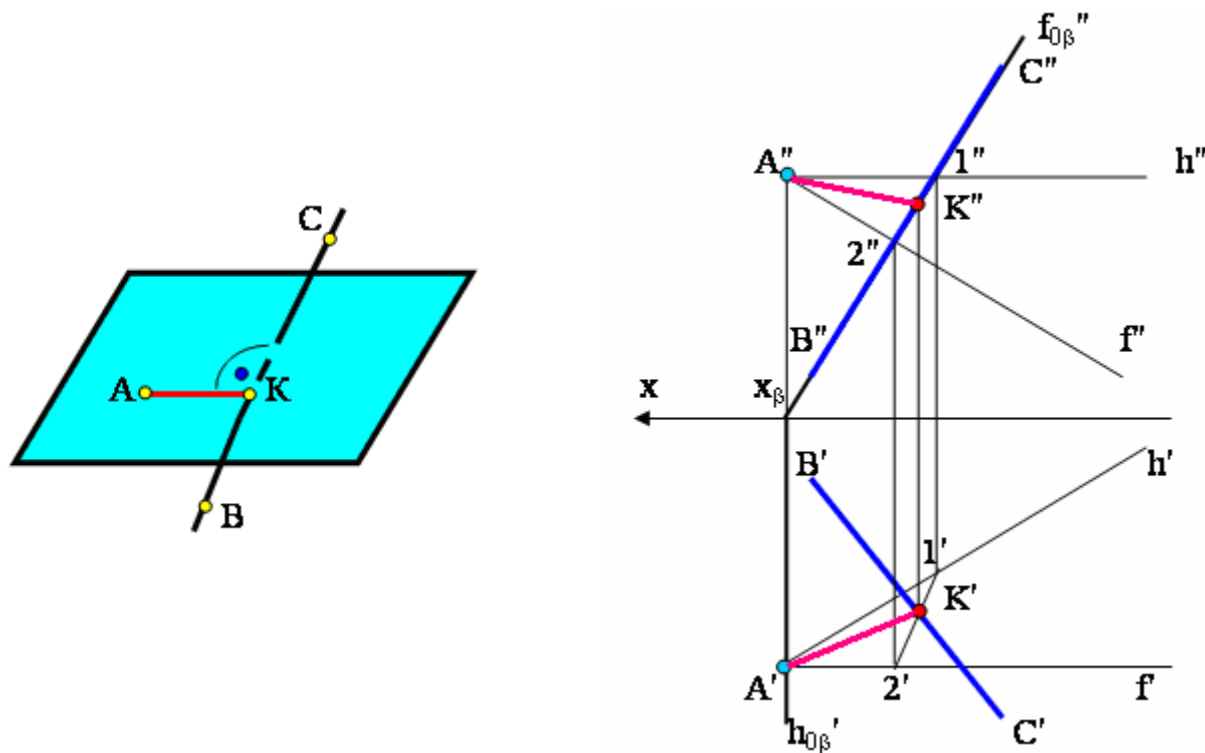
Жалпы жағдайда орналасқан 91 – шы суретте келтірілген BC түзуіне A нүктесінен перпендикуляр түсіру үшін:

A нүктесі арқылы BC түзуіне перпендикуляр болатын жазықтық жүргіземіз. Бұнда жазықтық қиылысатын түзулермен $\alpha(fxh)$ берілген.

BC түзуі арқылы фронталь проекциялаушы β жазықтығын жүргіземіз α мен β жазықтықтарының қиылысу сызығын 1, 2 жүргіземіз.

Қиылысу сызығы 1, 2 мен BC қиылысқан K нүктесі перпендикулярдың табаны болады.

AK түзуі A нүктесінен BC түзуіне түсірілген перпендикуляр болады.



Сурет 91